

# Nombres de Bell

En utilisant les propriétés des séries entières, nous calculons le nombre de partitions de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Théorème 1** (Nombres de Bell). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  le nombre de partitions de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Par convention on pose  $B_0 = 1$ . Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

[GOU21]  
p. 314

*Démonstration.* Notons que clairement  $B_1 = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimons  $B_{n+1}$  en fonction des termes précédents. Pour tout  $k \leq n$ , on note  $E_k$  l'ensemble des partitions  $P$  de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  tel que la partie de  $P$  qui contient l'entier  $n+1$  est de taille  $k+1$ . Choisir une partition dans  $E_k$ , c'est choisir  $k$  entiers de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (ceux de l'ensemble qui contient  $n+1$  dans la partition), puis construire une partition des  $n-k$  éléments restants. Donc  $|E_k| = \binom{n}{k} B_{n-k}$ .

Comme  $E_0, \dots, E_n$  forment une partition de l'ensemble des partitions de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , on obtient :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \quad (*)$$

À toute partition  $P$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on peut associer une permutation  $\sigma_P \in S_n$ , qui est le produit des cycles de supports les éléments de  $P$ . On construit ainsi une application  $P \mapsto \sigma_P$  injective. D'où :

$$B_n \leq |S_n| = n!$$

On en déduit en particulier que  $\frac{B_n}{n!} \leq 1$ . En vertu du lemme d'Abel, le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$  est supérieur ou égal à 1. On peut donc définir

$$B: \begin{array}{l} ]-R, R[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \end{array}$$

et en dérivant,  $\forall x \in ]-R, R[ :$

$$\begin{aligned} B'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n \end{aligned}$$

On reconnaît là le produit de Cauchy suivant :

$$B'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = B(x) e^x$$

Reste à résoudre cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$B(x) = \lambda e^{e^x}$$

Or,  $B(0) = B_0 = 1 = \lambda e^1$ . D'où  $B(x) = \frac{1}{e} e^{e^x}$ .

La série entière définissant l'exponentielle a un rayon de convergence infini. On peut écrire, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(nz)^k}{n!k!}}_{u_{n,k}(z)}$$

On va appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue à  $u_{n,k}(z)$  (où  $z \in \mathbb{C}$  est fixé) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}(z)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n|z|}}{n!} = e^{e|z|} < +\infty$$

Donc on peut intervertir les signes de sommations. Pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{e} e^{e^x} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(x) \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}(x) \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction, on en déduit, par identification des coefficients :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

□

*Remarque 2.* La partie sur le dénombrement (au début de la preuve) est un peu technique. N'hésitez pas à passer du temps dessus et à y réfléchir en faisant des exemples.

# Bibliographie

Les maths en tête

[GOU21]

---

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.