Lemme de Morse

En usant (certains diront plutôt "en abusant") du théorème d'inversion locale, on montre le lemme de Morse et on l'applique à l'étude de la position d'une surface par rapport à son plan tangent.

Notation 1. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application dont toutes les dérivées secondes existent, on note $\mathrm{Hess}(f)_a$ la hessienne de f au point a.

Lemme 2. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

[ROU] p. 209

Démonstration. On définit l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMA_0M \end{array}$$

qui est une application polynômiale en les coefficients de M, donc de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On calcule :

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &= {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0 + H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H + o(\|H\|^2) \end{aligned}$$

où ($\|.\|$ désigne une quelconque norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$). Ainsi, on a $\mathrm{d}\varphi_{I_n}(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$. D'où

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi_{I_n}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

On définit donc

$$F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

et on a $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi_{I_n})$. Ainsi, la différentielle $\mathrm{d}(\varphi_{|F})_{I_n}$ est bijective (car $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}(\varphi_{|F})_{I_n}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi_{I_n}) \cap F = \{0\}$).

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale à $\varphi_{|F}$: il existe U un voisinage ouvert de I_n dans F tel que $(\varphi_{|U})$ soit $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \varphi(U)$. De plus, on peut supposer $U \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (quitte à considérer $U \cap U'$ où U' est un voisinage ouvert de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; qui existe par continuité de det).

Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \varphi(I_n)$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall A \in V, A = {}^t(\varphi_{|U})^{-1}(A)A_0(\varphi_{|U})^{-1}(A)$$

Il suffit alors de poser $\psi = (\varphi_{|U})^{-1}$ (qui est bien une application de classe $\mathscr{C}^1$) pour avoir le résultat demandé. □

p. 354

Lemme 3 (Morse)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose :

— $\mathrm{d}f_0 = 0$.

— La matrice symétrique $\mathrm{Hess}(f)_0$ est inversible.

— La signature de $\mathrm{Hess}(f)_0$ est $(p, n-p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{p} \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^{n} \phi_k^2(x)$$

Démonstration. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0, qui donne :

$$\begin{aligned} & f(x) = f(0) + \mathrm{d}f_0(x) + \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2 f_{tx}(x,x)\,\mathrm{d}t \\ \iff & f(x) - f(0) = {}^t x Q(x) x \end{aligned} \tag{$*$}$$

où $Q(x)$ est la matrice symétrique définie par $Q(x) = \int_0^1 (1-t)\mathrm{Hess} f_{tx}\,\mathrm{d}t$ (qui est une application $\mathscr{C}^1$ sur U car f est $\mathscr{C}^3$ sur U).

Par hypothèse, $Q(0) = \frac{\mathrm{Hess}(f)_0}{2}$ est une matrice symétrique inversible, donc en vertu du Lemme 2, il existe un voisinage V_1 de $Q(0)$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V_1 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que :

$$\forall A \in V_1, A = {}^t\psi(A) Q(0) \psi(A)$$

Mais, l'application $x \mapsto Q(x)$ est continue sur U (puisque f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur U), donc il existe V_2 voisinage de 0 dans U tel que $\forall x \in V_2, Q(x) \in V_1$. On peut donc définir l'application $M = \psi \circ Q_{|V_2}$, qui nous permet d'écrire

$$\forall x \in V_2, Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x) \tag{$**$}$$

Or, $Q(0)$ est de signature $(p, n-p)$, donc d'après la loi d'inertie de Sylvester, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$Q(0) = {}^t P \underbrace{\begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{n-p} \end{pmatrix}}_{=D} P \tag{$***$}$$

Finalement en combinant $(*)$ avec $(**)$ et $(***)$, cela donne

$$\begin{aligned} & \forall x \in V_2, f(x) - f(0) = {}^t(PM(x)x) D (PM(x)x) \\ \overset{\varphi(x) = PM(x)x}{\iff} & \forall x \in V_2, f(x) - f(0) = {}^t\varphi(x) D \varphi(x) \end{aligned}$$

ce qui est bien l'expression voulue.

Il reste à montrer que φ définit bien un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux voisinages de l'origine. Notons déjà que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ car M l'est. Calculons la différentielle en 0 de φ. Soit

$h \in V_2$;

$$\begin{aligned}\varphi(h) - \varphi(0) &= PM(h)h \\ &= P(M(0) + \mathrm{d}M_0(h) + o(\|h\|))h \\ &= PM(0)h + o(\|h\|)\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{d}\varphi_0(h) = PM(0)h$. Or, $PM(0)$ est inversible, donc en particulier, $\mathrm{d}\varphi_0$ l'est aussi. On peut appliquer le théorème d'inversion locale à φ, qui donne l'existence de deux ouverts V et W contenant l'origine (car $\varphi(0) = 0$) tel que $\phi = \varphi_{|V}$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de V sur W. □

p. 341

Application 4. Soit S la surface d'équation $z = f(x, y)$ où f est de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique $\mathrm{d}^2 f_0$ non dégénérée. Alors, en notant P le plan tangent à S en 0 :

(i) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(2, 0)$, alors S est au-dessus de P au voisinage de 0.

(ii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(0, 2)$, alors S est en-dessous de P au voisinage de 0.

(iii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(1, 1)$, alors S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

Démonstration. Une équation cartésienne de P est donnée par

$$z - 0 = f(0) + \mathrm{d}f_0(x, y)$$

La différence d'altitude entre la surface S et le plan tangent P au point $h \in \mathbb{R}^2$ est donc donnée par

$$\delta(h) = f(h) - (f(0) + \mathrm{d}f_0(h))$$

et le Lemme 3 permet d'écrire

$$\delta(h) = \alpha\phi_1(h)^2 + \beta\phi_2(h)^2$$

où (α, β) désigne la signature de $\mathrm{d}^2 f_0$ et $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^2$. En particulier, ϕ_1 et ϕ_2 ne s'annulent simultanément qu'en 0.

(i) Si $\mathrm{d}^2 f_a$ est de signature $(2, 0)$, on a $\delta(h) > 0$ pour h voisin de 0 et $h \neq 0$.

(ii) Si $\mathrm{d}^2 f_a$ est de signature $(0, 2)$, on a $\delta(h) < 0$ pour h voisin de 0 et $h \neq 0$.

(iii) Si $\mathrm{d}^2 f_a$ est de signature $(1, 1)$, on a $\delta(h) = \phi_1(h)^2 - \phi_2(h)^2$ et S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

□

Bibliographie

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.