exp : $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Dans ce développement, on démontre que l'exponentielle de matrices induit un homéomorphisme de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Lemme 1. $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\} = f^{-1}\{0\}$$

où $f : M \mapsto {}^tM - M$ est continue, donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. □

Lemme 2. Une suite bornée d'un espace métrique qui admet une seule valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Démonstration. Soit (x_n) une suite bornée d'un espace métrique (E, d) qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence $\ell \in E$. On suppose par l'absurde que (x_n) ne converge pas vers ℓ :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } d(x_n, \ell) > \epsilon \qquad (*)$$

On va construire une sous-suite qui converge vers une valeur d'adhérence différente de ℓ.

Par $(*)$ appliqué à $N = 0$, $\exists n_0 \geq 0$ tel que $d(x_{n_0}, \ell) > \epsilon$. On définit donc $\varphi(0) = n_0$.

Supposons construite $\varphi(i)$ jusqu'à un rang k telle que $\forall i \leq k$, $\varphi(i+1) > \varphi(i)$ (lorsque cela à un sens) et $d(x_{\varphi(i)}, \ell) > \epsilon$. Il suffit alors d'appliquer $(*)$ à $N = \varphi(n) + 1$ pour obtenir un $n_k \geq \varphi(n) + 1 > \varphi(n)$ tel que $d(x_{n_k}, \ell) > \epsilon$; on définit alors $\varphi(k+1) = n_k$.

Nous venons donc de construire par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(n)}, \ell) > \epsilon$. La suite $(x_{\varphi(n)})$ est bornée (par hypothèse) : elle est contenue dans un compact et admet une valeur d'adhérence ℓ' (par le théorème de Bolzano-Weierstrass). Soit donc $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{(\varphi \circ \psi)(n)})$ converge vers ℓ'.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_{(\varphi \circ \psi)(n)}, \ell) > \epsilon$, qui donne $d(\ell', \ell) \geq \epsilon$ après un passage à la limite. Donc $\ell \neq \ell'$. Et ℓ' est clairement valeur d'adhérence de (x_n) : absurde. □

Lemme 3. Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, **[I-P]** p. 182

$$|||S|||_2 = \rho(S)$$

où ρ est l'application qui a une matrice y associe son rayon spectral.

Démonstration. D'après le théorème spectral, il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de S, qui sont réelles car S

est symétrique. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ dont on note $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans cette base. On a

$$\|Sx\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leq \rho(S)^2 \|x\|_2^2$$

D'où $|||S|||_2 \leq \rho(S)$. Pour obtenir l'inégalité inverse, il suffit de considérer $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S telle que $|\lambda| = \rho(S)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé à λ. On a alors

$$\|Sx\|_2 = |\lambda| \|x\|_2$$

et on a bien $\rho(S) \leq |||S|||_2$. □

Théorème 4. L'application exp : $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Montrer qu'une application est un homéomorphisme se fait en 4 étapes : on montre qu'elle est continue, injective, surjective, et que la réciproque est elle aussi continue.

— L'application est bien définie et continue : Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral,

$$\exists P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } S = P^{-1} \underbrace{\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}_{=D} P$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de S. On a donc

$$\begin{aligned} \exp(S) &= P^{-1} \exp(D) P \\ &= P^{-1} \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P \end{aligned}$$

Or, $P^{-1} = {}^tP$, donc ${}^t\exp(S) = \exp(S)$ et $\exp(S) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$${}^t x S x = {}^t(Px) D (Px) > 0$$

car $D \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Elle est de plus continue en tant que restriction de l'exponentielle définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (qui est la somme d'une série normalement convergente sur toute boule ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

— L'application est surjective : Soit $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On peut écrire

$$S = P \,\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P^{-1}$$

Il suffit alors de poser $U = P^{-1} \mathrm{Diag}(\ln(\mu_1), \dots, \ln(\mu_n)) P \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ pour avoir $\exp(U) = S$; d'où la surjectivité.

— L'application est injective : Soient $S, S' \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(S) = \exp(S')$. Montrons que $S = S'$. Comme avant, $\exists P, P' \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$S = P \,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \text{ et } S' = P' \,\mathrm{Diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) P'^{-1}$$

Soit $L \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $L(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ et $L(e^{\lambda'_i}) = \lambda'_i$ (les polynômes d'interpolation de Lagrange conviennent parfaitement et sont bien définis dans le cas présent car $e^{\lambda_i} =$

$e^{\lambda_j} \implies \lambda_i = \lambda_j$ par injectivité de l'exponentielle). D'où

$$\begin{aligned} L(\exp(S)) &= L(P\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}) \\ &= PL(\exp(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)))P^{-1} \\ &= P\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1} \\ &= S \end{aligned}$$

et de même, $L(\exp(S')) = S'$. D'où $S = S'$ car on a supposé $\exp(S) = \exp(S')$.

— L'application inverse est continue : Soit (A_k) une suite de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que la suite (B_k) de terme général $B_k = \exp^{-1}(A_k)$ converge vers $B = \exp^{-1}(A)$. Supposons tout d'abord (B_k) non bornée. Comme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $|||.|||_2 = \rho(.)$ (par le Lemme 3), il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\rho(B_{\varphi(k)}) \longrightarrow +\infty$. On peut donc extraire une suite de valeurs propres (λ_k) telle que $|\lambda_k| \longrightarrow +\infty$. Encore une fois, quitte à extraire, on peut supposer $\lambda_k \longrightarrow +\infty$ ou $\lambda_k \longrightarrow -\infty$.

  — Si $\lambda_k \longrightarrow +\infty$, $e^{\lambda_k} \longrightarrow +\infty$. Mais $\forall k \in \mathbb{N}$, e^{λ_k} est valeur propre de A_k, donc $\rho(A_k) \longrightarrow +\infty$: absurde car (A_k) converge.
  — Si $\lambda_k \longrightarrow -\infty$, $e^{-\lambda_k} \longrightarrow +\infty$. Mais $\forall k \in \mathbb{N}$, $e^{-\lambda_k}$ est valeur propre de A_k^{-1}, donc $\rho(A_k^{-1}) \longrightarrow +\infty$: absurde car (A_k^{-1}) converge par continuité de $M \mapsto M^{-1}$.

Donc la suite (B_k) est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, (B_k) admet une valeur d'adhérence $\widetilde{B_0}$. Comme $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé (c'est le Lemme 1), $\widetilde{B_0} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\widetilde{B} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une valeur d'adhérence de (B_k) et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $B_{\varphi(k)} \longrightarrow \widetilde{B}$. Alors,

$$\exp(B) = A \longleftarrow A_{\varphi(k)} = \exp(B_{\varphi(k)}) \longrightarrow \exp(\widetilde{B})$$

ie. $\exp(B) = \exp(\widetilde{B})$; donc $B = \widetilde{B} = \widetilde{B_0}$ par injectivité de exp. Donc par le Lemme 2, $B_k \longrightarrow B$.

□

Bibliographie

L’oral à l’agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L’oral à l’agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.