Caractérisation réelle de la fonction Γ

On montre que la fonction Γ d'Euler est la seule fonction log-convexe sur $\mathbb{R}^+$ prenant la valeur 1 en 1 et vérifiant $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

[ROM19-1] p. 364

Lemme 1. La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$ vérifie :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\Gamma(1) = 1$.

(iii) Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

Démonstration. (i) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \left[-e^{-t} t^x\right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

(ii) Comme $t \mapsto e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ est la densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre 1, on a

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t}_{=\Gamma(1)} = 1$$

(iii) Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$ et $\lambda \in]0,1[$. On applique l'inégalité de Hölder en posant $\lambda = \frac{1}{p}$ et $1 - \lambda = \frac{1}{q}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\lambda x} t^{(1-\lambda) y} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} (e^{-t} t^{x-1})^{\frac{1}{p}} (e^{-t} t^{y-1})^{\frac{1}{q}} \, \mathrm{d}t \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}
\end{aligned}$$

Donc $\ln \circ \Gamma$ vérifie bien l'inégalité de convexité sur $\mathbb{R}_*^+$ et ainsi, Γ est log-convexe.

□

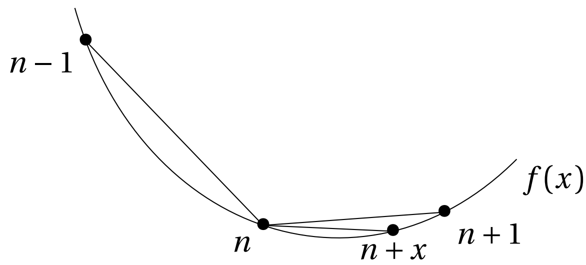
Théorème 2 (Bohr-Mollerup)**.** Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), le Point (ii) et le Point (iii) du Lemme 1. Alors $f = \Gamma$.

Démonstration. Par récurrence, on a d'après le Point (i) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,1], f(x+n) = (x+n-1) \dots (x+1) x f(x) \tag{$*$}$$

Donc les valeurs prises par f sur $\mathbb{R}_*^+$ sont entièrement déterminées par ses valeurs prises sur $]0,1]$. Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.

Soient donc $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$; on applique le lemme des trois pentes à la fonction convexe $\ln \circ f$ (d'après le Point (iii) appliqué aux points $n-1$, n, $n+x$ et $n+1$:



$$\frac{(\ln \circ f)(n) - (\ln \circ f)(n-1)}{n-(n-1)} \leq \frac{(\ln \circ f)(n+x) - (\ln \circ f)(n)}{n+x-n} \leq \frac{(\ln \circ f)(n+1) - (\ln \circ f)(n)}{n+1-n}$$

Mais, d'après $(*)$ et le Point (ii), on a $f(n) = (n-1)!$. D'où :

$$\begin{aligned}
&\ln(n-1) \leq \frac{(\ln \circ f)(n+x) - \ln((n-1)!)}{x} \leq \ln(n) \\
\implies &\ln((n-1)^x) \leq (\ln \circ f)(n+x) - \ln((n-1)!) \leq \ln(n^x) \\
\implies &\ln((n-1)^x (n-1)!) \leq (\ln \circ f)(n+x) \leq \ln(n^x (n-1)!)
\end{aligned}$$

Par croissance de la fonction ln, cela donne :

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(n+x) \leq n^x (n-1)!$$

Et en appliquant $(*)$, on obtient :

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{(x+n-1)\ldots(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{(x+n-1)\ldots(x+1)x}$$

En ne considérant que la première inégalité, on peut remplacer n par $n+1$ (car les deux inégalités sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\frac{n^x n!}{(x+n)\ldots(x+1)x} \leq f(x)$$

Or, $\frac{n^x (n-1)!}{(x+n-1)\ldots(x+1)x} = \frac{n^x n!}{(x+n)\ldots(x+1)x} \frac{x+n}{n}$, donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{n^x n!}{(x+n)\ldots(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{(x+n)\ldots(x+1)x} \frac{x+n}{n} \\
\implies &f(x) \frac{n}{x+n} \leq \frac{n^x n!}{(x+n)\ldots(x+1)x} \leq f(x) \\
\implies &f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\ldots(x+1)x}
\end{aligned}$$

en faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans la deuxième implication. Comme Γ vérifie le Point (i), le Point (ii), et le

Point (iii) ; le raisonnement précédent est a fortiori vrai aussi pour Γ. Donc

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} = f(x)$$

ie. f et Γ coïncident bien sur $]0,1]$. □

Remarque 3. À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in]0,1], \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à $\mathbb{R}_*^+$ entier.

Remarque 4. La preuve, telle qu'elle est écrite ici, est issue d'un livre de Walter Rudin. Elle est également disponible (sous une forme un peu différente) comme l'indique la référence, dans **[ROM19-1]**.

Bibliographie

Éléments d'analyse réelle **[ROM19-1]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.
https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle.