

## 262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_n)$  une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ .

### I - Premiers modes de convergence

#### 1. Convergence presque sûre

**Définition 1.** On dit que  $(X_n)$  **converge presque sûrement** vers  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  si

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X(\omega)\}) = 1$$

On note cela  $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$ .

[G-K]  
p. 265

*Remarque 2.* La convergence presque sûre d'une suite de vecteurs aléatoires équivaut à la convergence presque sûre de chacune des composantes. Pour cette raison, on peut se limiter à l'étude du cas  $d = 1$ .

**Exemple 3.** Si  $(X_n)$  est telle que  $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X_n = \pm\sqrt{n}) = \frac{1}{2}$ , alors  $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n X_k^2 \xrightarrow{(ps.)} 0$ .

p. 285

**Proposition 4.** Si  $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$  et  $Y_n \xrightarrow{(ps.)} Y$ , alors :

- (i)  $\forall a \in \mathbb{R}, aX_n \xrightarrow{(ps.)} aX$ .
- (ii)  $X_n + Y_n \xrightarrow{(ps.)} X + Y$ .
- (iii)  $X_n Y_n \xrightarrow{(ps.)} XY$ .

Plus généralement, si  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$  et  $X$  sont à valeurs dans  $E$ , alors  $f(X_n) \xrightarrow{(ps.)} f(X)$  pour toute  $f$  fonction définie et continue sur  $E$ .

p. 265

**Théorème 5** (1<sup>er</sup> lemme de Borel-Cantelli). Soit  $(A_n)$  une suite d'événements. Si  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  converge, alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0$$

p. 272

*Remarque 6.* Cela signifie que presque sûrement, seul un nombre fini d'événements  $A_n$  se réalisent.

**Corollaire 7.** Si  $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon)$  converge pour tout  $\epsilon > 0$ , alors  $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$ .

**Exemple 8.** Si  $(X_n)$  est telle que  $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$  et  $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n^2}$ , alors la suite  $(S_n)$  définie pour tout  $n \geq 1$  par  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  est constante à partir d'un certain rang.

p. 285

**Théorème 9** (2<sup>e</sup> lemme de Borel-Cantelli). Soit  $(A_n)$  une suite d'événements indépendants. Si  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  diverge, alors

p. 273

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 1$$

*Remarque 10.* Cela signifie que presque sûrement, un nombre infini d'événements  $A_n$  se réalisent.

**Exemple 11.** On fait une infinité de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Alors, la probabilité de l'événement "on obtient une infinité de fois deux "Face" consécutifs" est 1.

p. 286

**Corollaire 12** (Loi du 0-1 de Borel). Soit  $(A_n)$  une suite d'événements indépendants, alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0 \text{ ou } 1$$

et elle vaut 1 si et seulement si  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  diverge.

## 2. Convergence en probabilité

**Définition 13.** On dit que  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  si

p. 268

$$\forall \epsilon, \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

On note cela  $X_n \xrightarrow{(p)} X$ .

**Exemple 14.** On suppose que  $(X_n)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telle que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$  et  $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p$ . On définit la suite  $(Y_n)$  par

p. 285

$$\forall n \geq 1, Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_k = X_{k+1} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la suite  $(S_n)$  par  $\forall n \geq 1, M_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ . On a  $M_n - 2p(1-p) \xrightarrow{(p)} 0$ .

**Proposition 15.** Si  $X_n \xrightarrow{(p)} X$  et  $Y_n \xrightarrow{(p)} Y$ , alors :

(i)  $(X_n, Y_n) \xrightarrow{(p)} (X, Y)$ .

(ii)  $X_n + Y_n \xrightarrow{(p)} X + Y$ .

p. 268

**Théorème 16.** La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

**Contre-exemple 17.** La suite  $(M_n - 2p(1-p))$  de l'Exemple 14 ne converge pas vers 0 presque sûrement.

p. 285

**Théorème 18.** Si  $X_n \xrightarrow{(p)} X$ , alors il existe une sous-suite  $(X_{n_k})$  de  $(X_n)$  telle que  $X_{n_k} \xrightarrow{(ps.)} X$ .

p. 274

**Corollaire 19.** On suppose  $X_n \xrightarrow{(p)} X$ . Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  et  $X$  sont à valeurs dans  $E$ , alors  $f(X_n) \xrightarrow{(p)} f(X)$  pour toute  $f$  fonction définie et continue sur  $E$ .

### 3. Loix des grands nombres

**Théorème 20** (Loi faible des grands nombres). Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes de même loi et  $\mathcal{L}_1$ . On pose  $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ . Alors,

p. 270

$$M_n \xrightarrow{(p)} \mathbb{E}(X_1)$$

**Théorème 21** (Loi forte des grands nombres). Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi. On pose  $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ . Alors,

[Z-Q]  
p. 532

$$X_1 \in \mathcal{L}_1 \iff M_n \xrightarrow{(ps.)} \ell \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on a  $\ell = \mathbb{E}(X_1)$ .

**Application 22** (Théorème de Bernstein). Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On note

[G-K]  
p. 195

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

le  $n$ -ième polynôme de Bernstein associé à  $f$ . Alors la suite de fonctions  $(B_n(f))$  converge uniformément vers  $f$ .

**Corollaire 23** (Théorème de Weierstrass). Toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ ) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur  $[a, b]$ .

## II - Convergence $L_p$

**Définition 24.** On dit que  $(X_n)$  **converge dans  $L_p$**  vers  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  si

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in L_p, X \in L_p \text{ et } E(|X_n - X|^p)$$

On note cela  $X_n \xrightarrow{(L_p)} X$ .

p. 268

**Proposition 25.** Comme les espaces sont de mesure finie,

$$p \geq q \implies L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \subseteq L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

[D-L]  
p. 510

**Corollaire 26.** Pour  $1 \leq p \leq q$ , la convergence dans  $L_q$  implique la convergence dans  $L_p$  qui implique elle-même la convergence dans  $L_1$ .

**Contre-exemple 27.** Si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega, X_n(\omega) = \sqrt{n} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$$

alors,  $(X_n)$  converge dans  $L_1$  mais pas dans  $L_2$ .

[HAU]  
p. 365

**Théorème 28** (Convergence dominée). Si  $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$  et  $\exists g \in L_1$  telle que  $\|X_n\|_1 \leq g$ , alors  $X_n \xrightarrow{(L_1)} X$ .

[G-K]  
p. 65

**Contre-exemple 29.** On se place dans le cas où  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[), \lambda_{[0, 1[})$ . Si  $\forall n \geq 1, X_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}[}$ , alors  $(X_n)$  converge vers 0 presque sûrement, mais pas dans  $L_1$ .

[HAU]  
p. 365

**Proposition 30.** Si  $X_n \xrightarrow{(L_p)} X$ , alors il existe une sous-suite  $(X_{n_k})$  de  $(X_n)$  telle que  $X_{n_k} \xrightarrow{(ps.)} X$ .

[G-K]  
p. 265

**Théorème 31.** La convergence dans  $L_p$  (pour  $p \geq 1$ ) implique la convergence en probabilité.

**Exemple 32.** La convergence en probabilité de l'Exemple 14 est en fait une convergence dans  $L_2$ .

**Contre-exemple 33.** Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f : x \mapsto e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ . On pose  $\forall n \geq 1, Y_n = X \mathbb{1}_{[0, n]}(X) + e^{2n} \mathbb{1}_{[n, +\infty[}(X)$ . Alors  $(Y_n)$  converge vers  $X$  en probabilité, mais pas dans  $L_1$ .

p. 281

### III - Convergence en loi

#### 1. Définition et premières propriétés

**Définition 34.** On dit que  $(X_n)$  converge en loi vers  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  si

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(X))$$

On note cela  $X_n \xrightarrow{(d)} X$ .

p. 295

**Exemple 35.** Si  $\forall n \geq 1, X_n$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , alors  $\frac{X_n}{n}$  converge en loi vers la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

p. 313

**Proposition 36.** Si  $X_n \xrightarrow{(d)} X$  et  $Y_n \xrightarrow{(d)} Y$ , alors :

(i) La limite  $X$  est unique.

(ii)  $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{(d)} \langle X, Y \rangle$ .

Plus généralement, si  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$  et  $X$  sont à valeurs dans  $E$ , alors  $f(X_n) \xrightarrow{(d)} f(X)$  pour toute  $f$  fonction définie et continue sur  $E$ .

p. 295

**Théorème 37** (Lemme de Scheffé). On suppose :

—  $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$ .

—  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} X_n \, d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P}$ .

Alors,  $X_n \xrightarrow{(L_1)} X$ .

**Corollaire 38.** On suppose :

—  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$  admet une densité  $f_n$ .

—  $(f_n)$  converge presque partout vers une fonction  $f$ .

— Il existe une variable aléatoire  $X$  admettant  $f$  pour densité.

Alors,  $X_n \xrightarrow{(d)} X$ .

**Corollaire 39.** Si  $X$  et  $X_n$  sont des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble dénombrable  $D$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en supposant

$$\forall k \in D, \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

alors  $X_n \xrightarrow{(d)} X$ .

**Application 40.** Soit, pour  $n \geq 1$ , une variable aléatoire  $X_n$  suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p_n$ . On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$ . Alors,

$$X_n \xrightarrow{(d)} X$$

où  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

**Théorème 41.** En notant  $F_X$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$ , on a,

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(x)$$

en tout point  $x$  où  $F_X$  est continue.

p. 302

**Théorème 42.** Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  une variable aléatoire.

- (i) Si  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $X$ , alors  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ .
- (ii) Si  $(X_n)$  converge en loi vers une constante  $a$  (ou de manière équivalente, vers une masse de Dirac  $\delta_a$ ), alors  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $a$ .

**Contre-exemple 43.** Si  $(X_n)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors  $(X_n)$  converge en loi vers  $\mathcal{B}(2p(1-p))$ , mais pas en probabilité.

[HAU]  
p. 362

## 2. Théorème central limite et applications

**Théorème 44 (Slutsky).** Si  $X_n \xrightarrow{(d)} X$  et  $Y_n \xrightarrow{(d)} c$  où  $c$  est un vecteur constant, alors :

- (i)  $X_n + Y_n \xrightarrow{(d)} X + c$ .
- (ii)  $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{(d)} \langle X, c \rangle$ .

[G-K]  
p. 305

**Notation 45.** Si  $X$  est une variable aléatoire réelle, on note  $\phi_X$  sa fonction caractéristique.

**Théorème 46** (Lévy). On suppose que  $(X_n)$  est une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle. Alors :

[Z-Q]  
p. 544

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \phi_{X_n} \text{ converge simplement vers } \phi_X$$

**Théorème 47** (Central limite). On suppose que  $(X_n)$  est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note  $m$  l'espérance et  $\sigma^2$  la variance commune à ces variables. On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n - nm$ . Alors,

[G-K]  
p. 307

$$\left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

**Application 48** (Théorème de Moivre-Laplace). On suppose que  $(X_n)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(p)$ . Alors,

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

**Lemme 49.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes telles que  $X \sim \Gamma(a, \gamma)$  et  $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$ . Alors  $Z = X + Y \sim \Gamma(a + b, \gamma)$ .

p. 180

**Application 50** (Formule de Stirling).

p. 556

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left( \frac{n}{e} \right)^n$$

**Application 51** (Théorème des événements rares de Poisson). Soit  $(N_n)_{n \geq 1}$  une suite d'entiers tendant vers l'infini. On suppose que pour tout  $n$ ,  $A_{n,N_1}, \dots, A_{n,N_n}$  sont des événements indépendants avec  $\mathbb{P}(A_{n,N_k}) = p_{n,k}$ . On suppose également que :

p. 390

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lambda > 0 \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k}.$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \in \llbracket 1, N_n \rrbracket} p_{n,k} = 0.$$

Alors, la suite de variables aléatoires  $(S_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_{n,k}}$$

converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

## Annexes

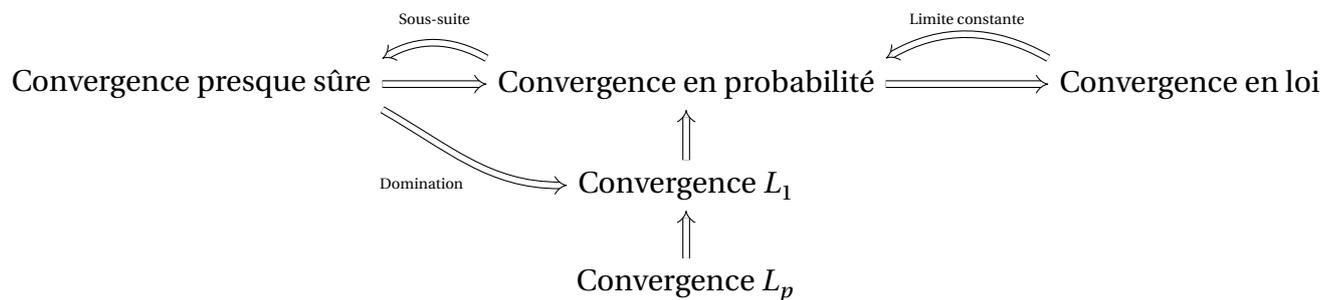


FIGURE 1 – Liens entre les différents modes de convergence.

# Bibliographie

## **Leçons pour l'agrégation de mathématiques**

[D-L]

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

## **De l'intégration aux probabilités**

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

## **Les Contre-Exemples en Mathématiques**

[HAU]

Bertrand HAUCHECORNE. *Les Contre-Exemples en Mathématiques*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juin 2007.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/5328-les-contre-exemples-en-mathematiques-9782729834180.html>.

## **Analyse pour l'agrégation**

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.