253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Convexité d'une fonction, d'un ensemble

1. Ensembles convexes

a. Généralités

Définition 1. — Soient $a, b \in E$. On appelle **segment** d'extrémités a et b, l'ensemble

$$[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$

— On dit qu'une partie C de E est **convexe** si

$$\forall a, b \in E, [a, b] \subseteq E$$

[GOU21] p. 51

Exemple 2. Un sous-espace vectoriel de E est convexe.

Remarque 3. Une partie convexe est connexe.

Proposition 4. (i) Dans $\mathbb{R}$, les intervalles sont à la fois les parties connexes et convexes.

(ii) Une intersection de parties convexes est convexe.

[BMP] p. 26

b. Enveloppes convexes

Définition 5. Soit $A \subseteq E$. On appelle **enveloppe convexe** de A le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant A. On la note $\mathrm{Conv}(A)$.

[GOU21] p. 51

Proposition 6. Soit $A \subseteq E$. Alors,

$$x \in \mathrm{Conv}(A) \iff x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ avec } x_1, \dots, x_n \in A \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Théorème 7 (Carathéodory)**.** Soit $A \subseteq E$. On suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie n. Alors, tout élément de $\mathrm{Conv}(A)$ est combinaison convexe de $n+1$ éléments de A.

p. 54

Application 8. Soit $A \subseteq E$ compact. On suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors $\mathrm{Conv}(A)$ est compacte.

Proposition 9. On suppose que E est un espace vectoriel normé. Alors, pour toute partie convexe C de E, $\overline{C}$ et $\mathring{C}$ sont convexes.

Théorème 10 (Hahn-Banach géométrique)**.** On se place dans le cas où E est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Soit C une partie de E convexe compacte. Alors, si $x \notin C$, il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que [BMP] p. 97

$$\forall y \in C, f(x) < \alpha < f(y)$$

Corollaire 11. On se place dans le cas où E est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Soit $A \subseteq E$. Alors, p. 133

$$x \in \overline{\mathrm{Conv}(A)} \iff \forall f \in H', f(x) \leq \sup_{y \in A} f(y)$$

2. Fonctions convexes

On munit E d'une norme $\|.\|$. Soit I une partie convexe de E.

Définition 12. — Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** si [ROM19-1] p. 225

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

— Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **concave** si $-f$ est convexe.

Remarque 13. Les définitions de f **strictement convexe** et f **strictement concave** s'obtiennent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente.

Exemple 14. — $x \mapsto \|x\|$ est convexe sur E.

— exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 15. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

Théorème 16. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall x, y \in I$, $t \mapsto f((1-t)x + ty)$ est convexe sur $[0,1]$.

Ce dernier théorème justifie que l'étude des fonctions convexes se ramène à l'étude des fonctions convexes sur un intervalle réel.

Proposition 17. — Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.
— La composée $\varphi \circ g$ d'une fonction convexe croissante $\varphi : J \to \mathbb{R}$ avec une fonction fonction convexe $g : I \to J$ est croissante.
— Une limite simple d'une suite de fonctions convexes est convexe.

3. Fonctions log-convexes

Définition 18. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}_*^+$ est **log-convexe** si $\ln \circ f$ est convexe sur I. p. 228

Proposition 19. Une fonction log-convexe est convexe.

Contre-exemple 20. $x \mapsto x$ est convexe mais non log-convexe.

Théorème 21. Pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}_*^+$, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est log-convexe.
(ii) $\forall \alpha > 0$, $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe.
(iii) $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f((1-t)x + ty) \leq (f(x))^{1-t}(f(y))^t$.
(iv) $\forall \alpha > 0$, f^α est convexe.

Lemme 22. La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$ vérifie : p. 364
(i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(ii) $\Gamma(1) = 1$.
(iii) Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

[DEV] **Théorème 23** (Bohr-Mollerup)**.** Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), Point (ii) et Point (iii) du Lemme 22. Alors $f = \Gamma$.

Remarque 24. À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in]0,1], \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à $\mathbb{R}_*^+$ entier.

II - Inégalités de convexité

1. Inégalités pour des familles de réels

Proposition 25 (Inégalité de Hölder)**.** Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, [GOU20] p. 97

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Proposition 26 (Inégalité de Minkowski)**.** Soit $p \geq 1$. Alors,

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0, \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition 27 (Comparaison des moyennes harmonique, géométrique et arithmétique)**.** Pour toute suite finie $x = (x_i)$ de n réels strictement positifs, on a : [ROM19-1] p. 242

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

2. Inégalités en théorie de l'intégration

Proposition 28 (Inégalité de Jensen)**.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe, alors pour toute fonction u continue sur un intervalle $[a, b]$, on a :

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \circ u(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 29 (Inégalité de Hölder)**.** Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathscr{L}_p$ et $g \in \mathscr{L}_q$. Alors $fg \in \mathscr{L}_1$ et [G-K] p. 209

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Remarque 30. C'est encore vrai pour $q = +\infty$ en convenant que $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Application 31. Dans un espace de mesure finie,

$$1 \leq p < q \leq +\infty \implies L_q \subseteq L_p$$

Théorème 32 (Inégalité de Minkowski)**.**

$$\forall f, g \in \mathscr{L}_p, \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

III - Convexité et optimisation

1. Pour les fonctions convexes

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle réel non réduit à un point.

Proposition 33. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est convexe et majorée. [ROM19-1] p. 234

Contre-exemple 34. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est convexe, majorée, mais non constante.

Proposition 35. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et est dérivable en un point $\alpha \in \mathring{I}$ tel que $f'(\alpha) = 0$, alors f admet un minimum global en α.

Proposition 36. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local, alors ce minimum est global.

2. Dans un espace de Hilbert

Pour toute la suite, on fixe H un espace de Hilbert de norme $\|.\|$ et on note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire associé. [LI] p. 32

Lemme 37 (Identité du parallélogramme)**.**

$$\forall x, y \in H, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 \|y\|^2)$$

et cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire.

[DEV] **Théorème 38** (Projection sur un convexe fermé)**.** Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide.

Alors :

$$\forall x \in H, \exists ! y \in C \text{ tel que } d(x,C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x,y)$$

On peut donc noter $y = P_C(x)$, le **projeté orthogonal de** x **sur** C. Il s'agit de l'unique point de C vérifiant

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$$

Théorème 39. Si F est un sous espace vectoriel fermé dans H, alors P_F est une application linéaire continue. De plus, pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$.

Théorème 40. Si F est un sous espace vectoriel fermé dans H, alors

$$H = F \oplus F^{\perp}$$

et P_F est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$: c'est la **projection orthogonale** sur F.

Corollaire 41. Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors,

$$\overline{F} = H \iff F^{\perp} = 0$$

Théorème 42 (de représentation de Riesz)**.**

$$\forall \varphi \in H', \exists ! y \in H, \text{ tel que } \forall x \in H, \varphi(x) = \langle x, y \rangle$$

et de plus, $|||\varphi||| = \|y\|$.

Corollaire 43.

$$\forall T \in H', \exists ! U \in H' \text{ tel que } \forall x, y \in H, \langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle$$

On note alors $U = T^*$: c'est **l'adjoint** de T. On a alors $|||T||| = |||T^*|||$.

Application 44. L'application **[Z-Q] p. 222**

$$\varphi : \begin{array}{ll} L_q & \rightarrow (L_p)' \\ g & \mapsto \left(\varphi_g : f \mapsto \int_X f g \, \mathrm{d}\mu\right) \end{array} \qquad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

Bibliographie

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

De l'intégration aux probabilités **[G-K]**

Olivier Garet et Aline Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités.* 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Cours d'analyse fonctionnelle **[LI]**

Daniel Li. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés.* Ellipses, 3 déc. 2013.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html.

Éléments d'analyse réelle **[ROM19-1]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* 2e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.
https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle.

Analyse pour l'agrégation **[Z-Q]**

Claude Zuily et Hervé Queffélec. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques.* 5e éd. Dunod, 26 août 2020.
https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques.