

## 243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

### I - Séries entières et rayons de convergence

#### 1. Définitions

**Définition 1.** On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme  $\sum a_n z^n$  où  $z$  est une variable complexe et où  $(a_n)$  est une suite complexe.

[GOU20]  
p. 247

**Exemple 2.**  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est une série entière.

**Lemme 3 (Abel).** Soient  $\sum a_n z^n$  une série entière et  $z_0 \in \mathbb{C}$  tels que  $(a_n z_0^n)$  soit bornée. Alors :

- (i)  $\forall z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < |z_0|$ ,  $\sum a_n z^n$  converge absolument.
- (ii)  $\forall r \in ]0, |z_0|[$ ,  $\sum a_n z^n$  converge normalement dans  $\overline{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ .

**Définition 4.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière. Le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

est le **rayon de convergence** de  $\sum a_n z^n$ . On a :

- $\forall z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$ ,  $\sum a_n z^n$  converge absolument.
- $\forall z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > R$ ,  $\sum a_n z^n$  diverge.
- $\forall r \in [0, R[$ ,  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur  $\overline{D}(0, r)$ .

Le disque  $D(0, R)$  est le **disque de convergence** de la série, le cercle  $C(0, R)$  est le **cercle d'incertitude**.

#### 2. Comparaison de rayons de convergence

Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières dont on note  $R_a$  et  $R_b$  les rayons de convergence respectifs.

[AMR11]  
p. 234

**Proposition 5.** (i) Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a  $|a_n| \leq |b_n|$ , alors  $R_a \geq R_b$ .

(ii) Si  $a_n = O(b_n)$ , alors  $R_a \geq R_b$ .

(iii) Si  $a_n \sim b_n$ , alors  $R_a = R_b$ .

**Exemple 6.** La série entière  $\sum e^{\cos(n)} z^n$  a un rayon de convergence égal à 1.

### 3. Calcul du rayon de convergence

**Proposition 7** (Règle de d'Alembert). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$  avec  $\lambda \in [0, +\infty]$ , alors le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est égal à  $\frac{1}{\lambda}$ .

p. 233

**Exemple 8.** La série entière  $\sum \frac{z^n}{n!}$  a un rayon de convergence infini.

**Proposition 9** (Formule d'Hadamard). Le rayon de convergence d'une série entière  $\sum a_n z^n$  est donné par  $\frac{1}{\rho}$  où

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

**Exemple 10.** La série entière  $\sum 2^n z^{2n}$  a un rayon de convergence égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Corollaire 11** (Règle de Cauchy). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda$  avec  $\lambda \in [0, +\infty]$ , alors le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est égal à  $\frac{1}{\lambda}$ .

**Exemple 12.** La série entière  $\sum \frac{n}{2^n} z^n$  a un rayon de convergence égal à 2.

### 4. Étude sur le cercle d'incertitude

**Exemple 13.** Le comportement d'une série entière peut varier sur le cercle d'incertitude suivant ses coefficients :

- $\sum z^n$  dont le rayon de convergence est égal à 1 diverge en tout point de  $C(0, 1)$ .
- $\sum \frac{1}{n^2} z^n$  dont le rayon de convergence est égal à 1 converge en tout point de  $C(0, 1)$ .
- $\sum \frac{z^n}{n} z^n$  dont le rayon de convergence est égal à 1 converge en 1 mais diverge en tout autre point de  $C(0, 1)$ .

p. 231

**Théorème 14** (Abel angulaire). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que  $\sum a_n$  converge. On note  $f$  la somme de cette série sur le disque unité  $D$  de  $\mathbb{C}$ . On fixe  $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$  et on pose  $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D \mid \exists \rho > 0 \text{ et } \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$ .

[GOU20]  
p. 263

[DEV]

Alors  $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

### Application 15.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

### Application 16.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

**Contre-exemple 17.** La réciproque est fautive :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

**Théorème 18** (Taubérien faible). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence 1. On note  $f$  la somme de cette série sur  $D(0, 1)$ . On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = S$$

Si  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , alors  $\sum a_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$ .

*Remarque 19.* Ce dernier résultat est une réciproque partielle du Théorème 14. Il reste vrai en supposant  $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  (c'est le théorème Taubérien fort).

## II - Propriétés

### 1. Opérations sur les séries entières

Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières dont on note  $R_a$  et  $R_b$  les rayons de convergence respectifs.

[AMR11]  
p. 235

**Proposition 20.** En multipliant  $\sum a_n z^n$  par un scalaire, on ne change pas le rayon de convergence de la série initiale.

**Définition 21.** On appelle **série entière somme** la série entière  $\sum (a_n + b_n) z^n$ .

**Proposition 22.** On note  $R_{a+b}$  le rayon de convergence de la série somme. Alors  $R_{a+b} \geq \min\{R_a, R_b\}$  avec égalité si  $R_a \neq R_b$ .

**Exemple 23.** Les séries entières  $\sum z^n$  et  $\sum -z^n$  ont leur rayon de convergence égal à 1 et la série somme un rayon de convergence infini.

[GOU20]  
p. 248

**Définition 24.** On appelle **produit de Cauchy** la série entière  $\sum c_n z^n$  où

[AMR11]  
p. 235

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

**Proposition 25.** On note  $R_c$  le rayon de convergence du produit de Cauchy  $\sum c_n z^n$ . Alors,

- (i)  $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$ .
- (ii)  $\forall z \in D(0, \min\{R_a, R_b\}), \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n)$ .

## 2. Propriétés de la somme

Dans toute cette sous-partie,  $\sum a_n z^n$  désigne une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On note  $S$  sa somme sur  $D(0, R)$ .

[AMR11]  
p. 239

**Proposition 26.**  $S$  est continue sur  $D(0, R)$ .

**Exemple 27.** La série entière  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est continue sur  $\mathbb{C}$ .

**Corollaire 28.**  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $S$  admet un développement limité à l'ordre  $p$  au voisinage de l'origine, dont la partie régulière est donnée par  $a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p$ .

**Proposition 29.** Soit  $[a, b] \subseteq ]-R, R[$ , alors

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx$$

**Corollaire 30.** Les primitives de  $S$  sont de la forme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**Proposition 31.**  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in ] -R, R[, S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

*Remarque 32.* En particulier,  $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$ .

**Exemple 33.**

$$\forall x \in ]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

### 3. Développement en série entière

**Définition 34.** Soient  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est **développable en série entière en**  $a \in U$  s'il existe  $r > 0$  et  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  tels que  $D(a, r) \subseteq U$  et

$$\forall z \in D(a, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

[BMP]  
p. 46

**Exemple 35.** Tout polynôme est développable en série entière en tout point de  $\mathbb{R}$ .

[AMR11]  
p. 241

**Proposition 36.** Soient  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et  $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  deux fonctions développables en séries entières en 0. Alors :

(i)  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda f + g$  est développable en série entière et son développement est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n$$

(ii)  $fg$  est développable en série entière et son développement est le produit de Cauchy des deux séries entières.

**Proposition 37.** Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une fonction développable en série entière en 0. Alors  $\exists I \subseteq \mathbb{R}$  avec  $0 \in I$  tel que :

(i)  $f'$  est développable en série entière en 0 son développement est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

(ii)  $f$  est donc  $\mathcal{C}^\infty$ .

(iii)  $f$  est continue et si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ ,  $F$  est développable en série entière en 0 son développement est

$$F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

**Exemple 38.** Voici quelques développements en série entière usuels :

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ .
- $\forall \alpha > 0, \forall x \in ]-1, 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ .

**Contre-exemple 39.** La fonction

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est  $\mathcal{C}^\infty$  mais n'est pas développable en série entière en 0.

[BMP]  
p. 55

### III - Applications

#### 1. Analyse complexe

**Définition 40.** Soient  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est **analytique sur**  $U$  si  $f$  est développable en série entière en tout point de  $U$ .

p. 46

**Théorème 41.** Soient  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et  $z_0 \in D(0, R)$ . On note  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ . Alors  $f$  est holomorphe en  $z_0$  et  $f'(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$ .

**Théorème 42 (Zéros isolés).** Soient  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert connexe et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $f$  est une fonction analytique si  $f$  n'est pas identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de  $f$  n'admet pas de point d'accumulation dans  $U$ .

**Corollaire 43.** Soient  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert connexe et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors  $f$  admet un nombre fini de zéros dans tout compact de  $U$ .

**Corollaire 44.** Deux séries entières dont les sommes coïncident sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}$  sont égales.

[GOU20]  
p. 250

**Théorème 45.** Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un disque ouvert de rayon  $\rho$  centré en un point  $a$ . Alors  $f$  est analytique sur ce disque. De plus, on a convergence normale sur tout compact du disque.

[BMP]  
p. 63

## 2. Dénombrement

[DEV]

**Application 46** (Nombres de Bell). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  le nombre de partitions de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Par convention on pose  $B_0 = 1$ . Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

[GOU20]  
p. 314

**Application 47.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $\sigma \in S_n$  est un **dérangement** de  $S_n$  si  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(k) \neq k$ . Alors,

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

[DAN]  
p. 336

## 3. Équations différentielles

**Proposition 48.** Pour résoudre une équation différentielle linéaire  $(L)$  à l'aide des séries entières :

- (i) On suppose que  $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est solution de  $(L)$  et on l'introduit dans  $(L)$ .
- (ii) On se ramène à  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 0$  où les  $b_n$  dépendent des  $a_n$ .
- (iii) On trouve une relation liant les  $a_n$  et on vérifie que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  a un rayon de convergence non-nul.

[AMR11]  
p. 246

**Exemple 49.** Les solutions de  $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$  sont les fonctions  $t \mapsto \lambda \frac{x}{1-x}$  (où  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

p. 273

## Annexes

[GOU20]  
p. 263

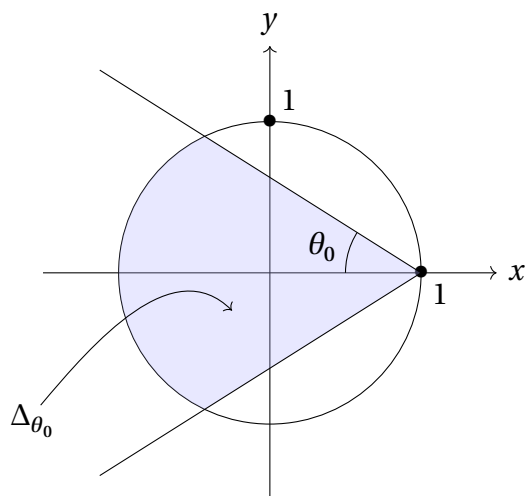


FIGURE 1 – Illustration du théorème d'Abel angulaire.



# Bibliographie

## **Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions**

[AMR11]

Mohammed EL-AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 15 nov. 2011.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html>.

## **Objectif agrégation**

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.