243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

I - Séries entières et rayons de convergence

1. Définitions

[GOU20] p. 247

Définition 1. On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et où (a_n) est une suite complexe.

Exemple 2. $\sum \frac{z^n}{n!}$ est une série entière.

Lemme 3 (Abel). Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors :

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

(ii) $\forall r \in]0, z_0[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Définition 4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

est le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$. On a :

— $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

— $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge.

— $\forall r \in [0, R[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.

Le disque $D(0,R)$ est le **disque de convergence** de la série, le cercle $C(0,R)$ est le **cercle d'incertitude**.

2. Comparaison de rayons de convergence

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs.

[AMR11] p. 234

Proposition 5. (i) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.

(ii) Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.

(iii) Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Exemple 6. La série entière $\sum e^{\cos(n)} z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

3. Calcul du rayon de convergence

Proposition 7 (Règle de d'Alembert)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à $\frac{1}{\lambda}$. p. 233

Exemple 8. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Proposition 9 (Formule d'Hadamard)**.** Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $\frac{1}{\rho}$ où

$$\rho = \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Exemple 10. La série entière $\sum 2^n z^{2n}$ a un rayon de convergence égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corollaire 11 (Règle de Cauchy)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\lim_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à $\frac{1}{\lambda}$.

Exemple 12. La série entière $\sum \frac{n}{2^n} z^n$ a un rayon de convergence égal à 2.

4. Étude sur le cercle d'incertitude

Exemple 13. Le comportement d'une série entière peut varier sur le cercle d'incertitude suivant ses coefficients : p. 231

— $\sum z^n$ dont le rayon de convergence est égal à 1 diverge en tout point de $C(0,1)$.

— $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ dont le rayon de convergence est égal à 1 converge en tout point de $C(0,1)$.

— $\sum \frac{z^n}{n} z^n$ dont le rayon de convergence est égal à 1 converge en 1 mais diverge en tout autre point de $C(0,1)$.

[DEV] **Théorème 14** (Abel angulaire)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité D de $\mathbb{C}$. On fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D \mid \exists \rho > 0 \text{ et } \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$. [GOU20] p. 263

Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Application 15.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

Application 16.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

Contre-exemple 17. La réciproque est fausse :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

Théorème 18 (Taubérien faible)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série sur $D(0,1)$. On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = S$$

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Remarque 19. Ce dernier résultat est une réciproque partielle du Théorème 14. Il reste vrai en supposant $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (c'est le théorème Taubérien fort).

II - Propriétés

1. Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs. **[AMR11]** p. 235

Proposition 20. En multipliant $\sum a_n z^n$ par un scalaire, on ne change pas le rayon de convergence de la série initiale.

Définition 21. On appelle **série entière somme** la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Proposition 22. On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série somme. Alors $R_{a+b} \geq \min\{R_a, R_b\}$ avec égalité si $R_a \neq R_b$.

[GOU20] p. 248

Exemple 23. Les séries entières $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont leur rayon de convergence égal à 1 et la série somme un rayon de convergence infini.

[AMR11] p. 235

Définition 24. On appelle **produit de Cauchy** la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N},\, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Proposition 25. On note R_c le rayon de convergence du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$. Alors,

(i) $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$.

(ii) $\forall z \in D(0, \min\{R_a, R_b\})$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n)$.

2. Propriétés de la somme

Dans toute cette sous-partie, $\sum a_n z^n$ désigne une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note S sa somme sur $D(0, R)$.

[AMR11] p. 239

Proposition 26. S est continue sur $D(0, R)$.

Exemple 27. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{C}$.

Corollaire 28. $\forall p \in \mathbb{N}$, S admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de l'origine, dont la partie régulière est donnée par $a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p$.

Proposition 29. Soit $[a, b] \subseteq]-R, R[$, alors

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n\,\mathrm{d}x$$

Corollaire 30. Les primitives de S sont de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Proposition 31. S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\, \forall x \in]-R, R[,\, S^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

Remarque 32. En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Exemple 33.

$$\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

3. Développement en série entière

Définition 34. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière en** $a \in U$ s'il existe $r > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que $D(a,r) \subseteq U$ et

$$\forall z \in D(a,r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

[BMP] p. 46

Exemple 35. Tout polynôme est développable en série entière en tout point de $\mathbb{R}$.

[AMR11] p. 241

Proposition 36. Soient $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ deux fonctions développables en séries entières en 0. Alors :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f + g$ est développable en série entière et son développement est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n$$

(ii) fg est développable en série entière et son développement est le produit de Cauchy des deux séries entières.

Proposition 37. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière en 0. Alors $\exists I \subseteq \mathbb{R}$ avec $0 \in I$ tel que :

(i) f' est développable en série entière en 0 son développement est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

(ii) f est donc $\mathscr{C}^\infty$.

(iii) f est continue et si F est une primitive de f sur I, F est développable en série entière en 0 son développement est

$$F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Exemple 38. Voici quelques développements en série entière usuels :

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

— $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Contre-exemple 39. La fonction [BMP] p. 55

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est $\mathscr{C}^\infty$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

III - Applications

1. Analyse complexe

Définition 40. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est **analytique sur** U si f est développable en série entière en tout point de U. p. 46

Théorème 41. Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $z_0 \in D(0,R)$. On note $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors f est holomorphe en z_0 et $f'(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$.

Théorème 42 (Zéros isolés)**.** Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{C}$. Si f est une fonction analytique si f n'est pas identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans U.

Corollaire 43. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{C}$. Alors f admet un nombre fini de zéros dans tout compact de U.

Corollaire 44. Deux séries entières dont les sommes coïncident sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ sont égales. [GOU20] p. 250

Théorème 45. Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert de rayon ρ centré en un point a. Alors f est analytique sur ce disque. De plus, on a convergence normale sur tout compact du disque. [BMP] p. 63

2. Dénombrement

[DEV]

Application 46 (Nombres de Bell)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$. Par convention on pose $B_0 = 1$. Alors, [GOU20] p. 314

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

Application 47. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sigma \in S_n$ est un **dérangement de** S_n si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(k) \neq k$. Alors, [DAN] p. 336

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

3. Équations différentielles

Proposition 48. Pour résoudre une équation différentielle linéaire (L) à l'aide des séries entières : [AMR11] p. 246

(i) On suppose que $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (L) et on l'introduit dans (L).

(ii) On se ramène à $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 0$ où les b_n dépendent des a_n.

(iii) On trouve une relation liant les a_n et on vérifie que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence non-nul.

Exemple 49. Les solutions de $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda \frac{x}{1-x}$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$). p. 273

Annexes

[GOU20]
p. 263

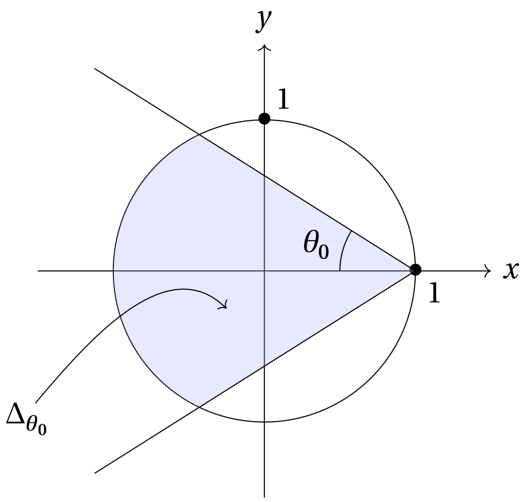

FIGURE 1 – Illustration du théorème d'Abel angulaire.

Bibliographie

Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions [AMR11]

Mohammed El-Amrani. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 15 nov. 2011.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html.

Objectif agrégation [BMP]

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation*. 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

Mathématiques pour l'agrégation [DAN]

Jean-François Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332195-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites.

Les maths en tête [GOU20]

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.