

## 229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

### I - Fonctions monotones

#### 1. Définition et première propriétés

**Définition 1.** Soient  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

- On dit que  $f$  est **croissante** si  $\forall x, y \in X, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ .
- On dit que  $f$  est **décroissante** si  $\forall x, y \in X, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$ .
- On dit que  $f$  est **monotone** si  $f$  est croissante ou décroissante.

[R-R]  
p. 31

*Remarque 2.* Les définitions de  $f$  **strictement croissante** et  $f$  **strictement décroissante** s'obtiennent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente.

Par conséquent,  $f$  est décroissante si et seulement si  $-f$  est croissante. Pour cette raison, nous pouvons nous limiter à l'étude des fonctions croissantes.

**Exemple 3.**  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  est une fonction monotone.

**Proposition 4.** L'ensemble des fonctions croissantes est stable par addition, par multiplication par un scalaire positif et par composition.

[D-L]  
p. 405

**Proposition 5.** Soient  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalle non réduit à un point et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose  $f$  dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ . Alors  $f$  est croissante si et seulement si  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .

[ROM19-1]  
p. 205

#### 2. Régularité

Soit  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalle non réduit à un point.

p. 162

**Définition 6.** On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  a pour **limite à gauche** (resp. **à droite**)  $\ell$  en  $\alpha \in \bar{I}$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ tel que } \forall x \in I \cap ]\alpha - \eta, \alpha[, |f(x) - \ell| < \epsilon$$

(resp.  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ tel que } \forall x \in I \cap ]\alpha, \alpha + \eta[, |f(x) - \ell| < \epsilon$ ).

**Théorème 7.** On suppose que  $I$  est un intervalle ouvert. Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction monotone, elle admet alors une limite à gauche et à droite en tout point. Dans le cas où  $f$  est croissante, on a

$$\forall x \in I, \quad f(x^-) = \sup_{\substack{t \in I \\ t < x}} f(t) \leq f(x) \leq f(x^+) = \inf_{\substack{t \in I \\ t > x}} f(t)$$

**Définition 8.** Si  $\alpha \in \overset{\circ}{I}$ , et si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est discontinue en  $\alpha$  avec des limites à gauche et à droite en ce point, on dit que  $f$  a une **discontinuité de première espèce** en  $\alpha$ .

**Proposition 9.** Une fonction monotone de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  ne peut avoir que des discontinuités de première espèce.

**Théorème 10.** On suppose que  $I$  est un intervalle ouvert. Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction monotone, alors l'ensemble des points de discontinuités de  $f$  est dénombrable.

**Exemple 11.** La fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(0) = 0$  et  $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$  est croissante avec une infinité de points de discontinuité.

**Proposition 12.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction monotone telle que  $f(I)$  est un intervalle, elle est alors continue sur  $I$ .

p. 175

**Théorème 13 (Bijection).** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue et strictement monotone, alors :

- (i)  $f(I)$  est un intervalle.
- (ii)  $f^{-1}$  est continue.
- (iii)  $f^{-1}$  est strictement monotone de même sens de variation que  $f$ .

**Exemple 14.** La fonction  $\exp : x \rightarrow e^x$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_*^+$  qui admet donc une bijection réciproque  $\ln$  qui est strictement croissante.

**Proposition 15.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Cette fonction  $f$  est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

**Théorème 16 (Lebesgue).** Une application monotone est dérivable presque partout.

[D-L]  
p. 405

### 3. Suites et séries

**Lemme 17.** Une limite simple d'une suite de fonctions croissantes est croissante.

[GOU20]  
p. 238

**Théorème 18** (Second théorème de Dini). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions croissantes réelles continues définies sur un segment  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction continue sur  $I$ , alors la convergence est uniforme.

**Proposition 19** (Comparaison série - intégrale). Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Alors la suite  $(U_n)$  définie par

p. 212

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$$

est convergente. En particulier, la série  $\sum f(n)$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.

**Application 20** (Développement asymptotique de la série harmonique).

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler.

## II - Fonctions convexes

Soit  $I$  une partie convexe d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  non réduite à un point.

### 1. Définitions

**Définition 21.** —  $I$  est **convexe** si  $\forall a, b \in I, [a, b] \subseteq I$ .

— Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **convexe** si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

— Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **concave** si  $-f$  est convexe.

[ROM19-  
1]  
p. 225

*Remarque 22.* Les définitions de  $f$  **strictement convexe** et  $f$  **strictement concave** s'obtiennent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente.

**Exemple 23.** —  $x \mapsto \|x\|$  est convexe sur  $E$ .

—  $\exp$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 24.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe dans  $E \times \mathbb{R}$ .

**Théorème 25.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si et seulement si  $\forall x, y \in I, t \mapsto f((1-t)x + ty)$  est convexe sur  $[0, 1]$ .

Ce dernier théorème justifie que l'étude des fonctions convexes se ramène à l'étude des fonctions convexes sur un intervalle réel.

**Proposition 26.** — Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.

— La composée  $\varphi \circ g$  d'une fonction convexe croissante  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  avec une fonction convexe  $g : I \rightarrow J$  est croissante.

— Une limite simple d'une suite de fonctions convexes est convexe.

À partir de maintenant, on supposera que  $I$  est un intervalle réel non réduit à un point.

## 2. Propriétés sur $\mathbb{R}$

*Remarque 27.* Dans le cadre réel, la Définition 21 revient à dire que les cordes  $[(a, f(a)), (b, f(b))]$  sont au-dessus du graphe de  $f$  pour tout  $a, b \in I$  avec  $a < b$ .

[GOU20]  
p. 95

**Proposition 28.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si et seulement si  $\forall x_0 \in I$ , l'application

$$\begin{array}{l} I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$

est croissante.

**Corollaire 29** (Inégalité des trois pentes). Soient fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et  $a, b, c \in I$  tels que  $a < b < c$ . Alors,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

**Définition 30.** On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **dérivable à gauche** (resp. **à droite**) en  $a \in I$  si la

p. 71

limite

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t \in I}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

(resp.  $\lim_{\substack{t \rightarrow a^+ \\ t \in I}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ ) existe.

**Proposition 31.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe possède en tout point de  $\overset{\circ}{I}$  une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur  $\overset{\circ}{I}$ . De plus les applications dérivées à gauche  $f'_g$  et à droite  $f'_d$  sont croissantes avec  $f'_g(x) \leq f'_d(x)$  pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}$ .

p. 96

**Théorème 32.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est convexe.
- (ii)  $f'$  est croissante.
- (iii) La courbe représentative de  $f$  est au-dessus de ses tangentes.

**Proposition 33.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable est convexe si et seulement si  $f''(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .

### 3. Fonctions log-convexes

**Définition 34.** On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_*^+$  est **log-convexe** si  $\ln \circ f$  est convexe sur  $I$ .

[ROM19-1]  
p. 228

**Proposition 35.** Une fonction log-convexe est convexe.

**Contre-exemple 36.**  $x \mapsto x$  est convexe mais non log-convexe.

**Théorème 37.** Pour une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est log-convexe.
- (ii)  $\forall \alpha > 0, x \mapsto \alpha^x f(x)$  est convexe.
- (iii)  $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (f(x))^{1-t} (f(y))^t$ .
- (iv)  $\forall \alpha > 0, f^\alpha$  est convexe.

**Lemme 38.** La fonction  $\Gamma$  définie pour tout  $x > 0$  par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  vérifie :

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

p. 364

(ii)  $\Gamma(1) = 1$ .

(iii)  $\Gamma$  est log-convexe sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

[DEV]

**Théorème 39** (Bohr-Mollerup). Soit  $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant le Point (i), Point (ii) et Point (iii) du Lemme 38. Alors  $f = \Gamma$ .

p. 364

*Remarque 40.* À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in ]0, 1], \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à  $\mathbb{R}_*^+$  entier.

### III - Applications

#### 1. Inégalités

**Proposition 41** (Inégalité de Hölder). Soient  $p, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors,

[GOU20]  
p. 97

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Proposition 42** (Inégalité de Minkowski). Soit  $p \geq 1$ . Alors,

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0, \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Proposition 43** (Inégalité de Jensen). Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, alors pour toute fonction  $u$  continue sur un intervalle  $[a, b]$ , on a :

[ROM19-1]  
p. 241

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \circ u(t) dt$$

**Proposition 44** (Comparaison des moyennes harmonique, géométrique et arithmétique). Pour toute suite finie  $x = (x_i)$  de  $n$  réels strictement positifs, on a :

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

## 2. Recherche d'extrema

**Proposition 45.** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est constante si et seulement si elle est convexe et majorée.

p. 234

**Contre-exemple 46.** La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  est convexe, majorée, mais non constante.

**Proposition 47.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et est dérivable en un point  $\alpha \in \overset{\circ}{I}$  tel que  $f'(\alpha) = 0$ , alors  $f$  admet un minimum global en  $\alpha$ .

**Proposition 48.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et admet un minimum local, alors ce minimum est global.

## 3. Méthode de Newton

**Théorème 49** (Méthode de Newton). Soit  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  strictement croissante sur  $[c, d]$ . On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{l} [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car  $f' > 0$ ). Alors :

- (i)  $\exists! a \in [c, d]$  tel que  $f(a) = 0$ .
- (ii)  $\exists \alpha > 0$  tel que  $I = [a - \alpha, a + \alpha]$  est stable par  $\varphi$ .
- (iii) La suite  $(x_n)$  des itérés (définie par récurrence par  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  pour tout  $n \geq 0$ ) converge quadratiquement vers  $a$  pour tout  $x_0 \in I$ .

**Corollaire 50.** En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus  $f$  strictement convexe sur  $[c, d]$ , le résultat du théorème est vrai sur  $I = [a, d]$ . De plus :

- (i)  $(x_n)$  est strictement décroissante (ou constante).
- (ii)  $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$  pour  $x_0 > a$ .

**Exemple 51.** — On fixe  $y > 0$ . En itérant la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{y}{x} \right)$  pour un nombre de départ compris entre  $c$  et  $d$  où  $0 < c < d$  et  $c^2 < 0 < d^2$ , on peut obtenir une approximation du nombre  $\sqrt{y}$ .

[ROU]  
p. 152

[DEV]

- En itérant la fonction  $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$  pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

# Bibliographie

## **Leçons pour l'agrégation de mathématiques**

[D-L]

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **Formulaire de maths**

[R-R]

Olivier RODOT et Jean-Étienne ROMBALDI. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours*. De Boeck Supérieur, 30 août 2022.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths>.

## **Éléments d'analyse réelle**

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2<sup>e</sup> éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.

## **Petit guide de calcul différentiel**

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.