224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

I - Comparaison de suites et de fonctions

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.

[GOU20] p. 87

1. Relations de comparaison

Définition 1. Soit X un espace métrique. On considère deux applications $f, g : D \to E$ où $D \subseteq X$. Soit x_0 un point d'accumulation de D.

— On dit que f est **dominée** par g au voisinage de x_0, si

$$\exists C > 0, \exists V \text{ voisinage de } x_0 \text{ tels que } \forall x \in V \cap D, \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$$

On note alors $f(x) = O(g(x))$ quand $x \to x_0$.

— On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de x_0, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists V \text{ voisinage de } x_0 \text{ tels que } \forall x \in V \cap D, \|f(x)\| \leq \epsilon\|g(x)\|$$

On note alors $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to x_0$.

— On dit que f et g sont **équivalentes** au voisinage de x_0 si $f(x) - g(x) = o(g(x))$ quand $x \to x_0$ et on écrit alors $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to x_0$.

Remarque 2. Dans la pratique, on utilisera souvent cette notation pour des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de l'infini, ou pour des suites réelles ou complexes (u_n) quand $n \to +\infty$.

[DAN] p. 132

Exemple 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

— $f = O(1)$ si et seulement si f est une application bornée au voisinage de x_0.

— $f = o(1)$ si et seulement si f admet 0 pour limite en x_0.

— $f = o\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$ signifie que $x \mapsto xf(x)$ admet pour limite 0 en $+\infty$.

Proposition 4. On considère deux applications $f, g : D \to \mathbb{R}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose qu'il existe un voisinage V_0 de x_0 tel que g ne s'annule pas. Alors, quand $x \to x_0$:

(i) $f(x) = o(g(x))$ si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

(ii) $f(x) \sim g(x)$ si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$.

Proposition 5. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, compatible avec le produit et la puissance. Si deux fonctions f_1 et f_2 équivalentes au voisinage d'un point admettent des limites ℓ_1 et ℓ_2 en ce point, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Contre-exemple 6.
— $\sim$ n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple, quand $x \to +\infty$,
$$x + \sqrt{x} \sim x,\ -x \sim -x + \ln(x) \text{ mais } \sqrt{x} \nsim \ln(x)$$
— $\sim$ n'est pas compatible avec la composition. Par exemple, quand $x \to +\infty$,
$$x \sim x + 1 \text{ mais } e^x \nsim e^{x+1}$$

2. Développement limité

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Soit $f : I \to E$ une application. On suppose $0 \in I$.

[GOU20] p. 89

Définition 7. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ s'il existe $a_0, \dots, a_n \in E$ tels que, au voisinage de 0,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Remarque 8. On pourrait de même définir les développements limités au voisinage d'un point $a \in \overline{I}$.

Proposition 9.
(i) Un développement limité, s'il existe, est unique.
(ii) Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre $n \geq 1$, f est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut a_1.
(iii) Si f est paire (resp. impaire), les coefficients du développement limité d'indice impair (resp. pair) sont nuls.
(iv) Si f est n fois dérivable en 0, f' admet un développement limité en 0 : $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} + o(x^{n-1})$.
(v) Si f est dérivable sur I et f' admet un développement limité en 0 : $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$; alors, f admet un développement limité en 0 donné par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!} x^{k+1} + o(x^{k+1})$.
(vi) Les règles de somme, produit, quotient et composition obéissent aux mêmes règles que pour les polynômes (sous réserve de bonne définition).

Théorème 10 (Formule de Taylor-Young)**.** On suppose f de classe $\mathscr{C}^n$ sur I telle que $f^{(n+1)}(x)$ existe pour $x \in I$. Alors, quand $h \longrightarrow 0$, on a

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(h^{n+1})$$

Proposition 11. Si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n+1})$$

Exemple 12. En 0, on a les développements limités usuels suivants.

— $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

— $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.

— $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.

— $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.

— $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.

— Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} + o(x^n)$.

Application 13.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = -2$$

3. Développement asymptotique

Définition 14. Soient X un espace métrique et $x_0 \in X$. On appelle **échelle de comparaison** un ensemble $\mathscr{E}$ de fonctions définies au voisinage de x_0 dans X, sauf éventuellement en x_0, et vérifiant la propriété suivante : si $f, g \in \mathscr{E}$, alors $f = g$ ou bien $f = o(g)$ ou bien $g = o(f)$.

Exemple 15. Au voisinage de $+\infty$ pour les fonctions de la variable réelle, les fonctions du type $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ forment une échelle de comparaison.

Définition 16. Soit X un espace métrique. On considère deux applications $f, g : D \to E$ où $D \subseteq X$. Soient x_0 un point d'accumulation de D et $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle **développement asymptotique** à k termes de f par rapport à une échelle de comparaison $\mathscr{E}$ au voisinage de

x_0 toute expression de la forme
$$\sum_{i=1}^{k} c_i f_i$$
vérifiant

(i) $c_1, \dots, c_k \in E$ sont des constantes multiplicatives.

(ii) $f_1, \dots, f_k \in \mathscr{E}$ avec pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $f_{i+1}(x) = o(f_i(x))$.

(iii) $f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i + o(f_k(x))$ quand $x \to x_0$.

$c_1 f_1$ est appelée **partie principale** de f au point x_0.

Remarque 17. En reprenant les notations précédentes :

— $f(x) \sim c_1 f_1(x)$ quand $x \to x_0$.

— Un tel développement, s'il existe, est unique.

II - Exemples de développements asymptotiques de suites

1. Séries numériques

Proposition 18 (Comparaison série - intégrale)**.** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la suite (U_n) définie par p. 212
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$
est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Lemme 19. Soit $\alpha > 1$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a **[I-P]** p. 380
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

[DEV] **Proposition 20** (Développement asymptotique de la série harmonique)**.** On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors, quand n tend vers $+\infty$,
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Application 21 (Série de Bertrand)**.** La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. **[GOU20]** p. 212

2. Suites récurrentes

Définition 22. À toute suite numérique (u_n) on y associe sa suite (v_n) des **moyennes de Cesàro** où

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

[AMR11] p. 53

Théorème 23. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, alors sa suite des moyennes de Cesàro converge vers ℓ. On dit que (u_n) converge **au sens de Cesàro**.

Proposition 24. Soit f une application continue définie au voisinage de 0^+ admettant un développement asymptotique en 0 de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$, où $a > 0$ et $\alpha > 1$. Alors pour $u_0 > 0$ assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ vérifie

$$u_n \sim \frac{1}{(na(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

[FGN3] p. 142

Exemple 25. Si $f = \sin$ et (u_n) est définie par $u_0 \in [0, 2\pi]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on a l'équivalent en $+\infty$:

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Proposition 26. En reprenant les notations précédentes, on a, pour $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

[GOU20] p. 228

Exemple 27. On définit (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$, on a l'équivalent en $+\infty$:

$$u_n = n + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

[FGN3] p. 148

[DEV]

Théorème 28 (Méthode de Newton)**.** Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ strictement croissante sur $[c,d]$. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [c,d] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $f' > 0$). Alors :

[ROU] p. 152

(i) $\exists! a \in [c, d]$ tel que $f(a) = 0$.

(ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ est stable par φ.

(iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

Corollaire 29. En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus f strictement convexe sur $[c, d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a, d]$. De plus :

(i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).

(ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

Exemple 30. — On fixe $y > 0$. En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right)$ pour un nombre de départ compris entre c et d où $0 < c < d$ et $c^2 < 0 < d^2$, on peut obtenir une approximation du nombre $\sqrt{y}$.

— En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$ pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Suites définies implicitement

Exemple 31. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit a_n la plus grande racine réelle de $X^{2n} - 2nX + 1$. Alors, [FGN3] p. 181

$$a_n = 1 + \frac{\ln(2n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Exemple 32. Soit (u_n) une suite de réels vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Alors,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

Exemple 33. Soit $c > 0$. On note x_n l'unique racine réelle de $x \mapsto x\sin(x) - c\cos(x)$. Alors,

$$x_n - n\pi \sim \frac{c}{n\pi}$$

III - Exemples de développements asymptotiques de fonctions

1. Fonctions définies par la somme d'une série

Théorème 34 (Central limite)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance commune à ces variables. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n - nm$. Alors, [G-K] p. 307

$$\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Application 35 (Théorème de Moivre-Laplace)**.** On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Alors,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

Lemme 36. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \Gamma(a, \gamma)$ et $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$. Alors $Z = X + Y \sim \Gamma(a + b, \gamma)$. p. 180

Application 37 (Formule de Stirling)**.** p. 556

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Proposition 38. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est non nulle. Alors, $\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)$ converge et, [GOU20] p. 159

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \sim \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 39.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{c}{\sqrt{-\ln(x)}} \sim \frac{c}{\sqrt{1-x}}$$

où $c = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Fonctions définies par une intégrale

p. 163

Théorème 40. Soient $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$), E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$, $f : [a,b[\rightarrow E$ et $g : [a,b[\rightarrow \mathbb{R}_*^+$ deux applications continues par morceaux sur $[a,b[$.

(i) Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors quand $x \rightarrow b^-$,
- Si $f(t) = O(g(t))$, alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $f(t) = o(g(t))$, alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $f(t) \sim g(t)$, alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

(ii) Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors quand $x \rightarrow b^-$,
- Si $f(t) = O(g(t))$, alors $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $f(t) = o(g(t))$, alors $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $f(t) \sim g(t)$, alors $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 41. Lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = o\left(\int_1^x t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right) = o(x^\alpha)$$

pour tout $\alpha > 0$.

Application 42. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $g : [a,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$ et que lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{g'(x)}{g(x)} \sim \frac{\mu}{x}$$

pour $\mu \notin \{-1,0\}$. Alors,

(i) Si $\mu > -1$, $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{xg(x)}{\mu+1}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

(ii) Si $\mu < -1$, $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \sim -\frac{xg(x)}{\mu+1}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

p. 173

Exemple 43. Lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \sum_{i=1}^k \frac{x}{\ln(x)^i}(i-1)! + o\left(\frac{x}{\ln(x)^k}\right)$$

[ROM21] p. 364

Proposition 44. La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ vérifie :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\Gamma(1) = 1$.

(iii) Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

De plus,

$$\forall x \in]0,1], \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}$$

(que l'on peut étendre à $\mathbb{R}_*^+$ entier).

Théorème 45 (Formule de Stirling généralisée)**.** [GOU20] p. 166

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Bibliographie

Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions **[AMR11]**

Mohammed EL-AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 15 nov. 2011.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html.

Mathématiques pour l'agrégation **[DAN]**

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332195-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites.

Oraux X-ENS Mathématiques **[FGN3]**

Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 3*. 3e éd. Cassini, 27 mai 2020.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/103-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-3.html.

De l'intégration aux probabilités **[G-K]**

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.