

## 223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Dans toute la suite,  $\mathbb{K}$  désignera le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I - Convergence des suites numériques

#### 1. Limite d'une suite

**Définition 1.** Soit  $E$  un ensemble non vide. On appelle **suite** à valeurs dans  $E$  toute application  $u : D \rightarrow E$  où  $D$  est une partie de  $\mathbb{N}$ . Lorsque  $E$  est une partie de  $\mathbb{R}$  (resp. de  $\mathbb{C}$ ), on dit que  $u$  est **réelle** (resp. **complexe**). Dans ces deux cas, on parle de **suite numérique**.

[AMR11]  
p. 1

On fixe, pour tout le reste de la leçon,  $(u_n)$  une suite numérique à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

**Définition 2.** — Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on dit que  $(u_n)$  est **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$  (resp.  $A \leq u_n$ ).

p. 12

— On dit que  $(u_n)$  est **bornée** s'il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A$  (resp.  $A \leq u_n$ ). Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , cela revient à dire que  $(u_n)$  est majorée et minorée.

— On dit que  $(u_n)$  admet  $\ell \in \mathbb{K}$  pour **limite** (ou **converge** / **tend** vers  $\ell$ ) si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On le note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  ou  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

— On dit que  $(u_n)$  est **convergente** si elle admet une limite. Sinon, on dit qu'elle est **divergente**.

**Exemple 3.** Si  $(u_n)$  est définie par

$$\forall n \geq 1, u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

alors  $(u_n)$  converge vers 1.

**Théorème 4.** On a unicité de la limite dans  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 5.** Toute suite numérique convergente est bornée.

**Contre-exemple 6.**  $((-1)^n)$  est bornée, non convergente.

**Proposition 7.** Soit  $(v_n)$  une suite numérique bornée. On suppose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 0$ .

**Proposition 8.** On suppose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_1 \in \mathbb{K}$ . Soit  $(v_n)$  une suite numérique qui converge vers  $\ell_2 \in \mathbb{K}$ . Alors :

- (i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$ .
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \ell_1$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = \ell_1 \ell_2$ .
- (iv) Si  $\ell_2 \neq 0$ , on a  $v_n \neq 0$  à partir d'un certain rang et,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ .

**Définition 9.** On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

— On dit que  $(u_n)$  **tend vers**  $+\infty$  si,

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n \geq A$$

— On dit que  $(u_n)$  **tend vers**  $-\infty$  si  $(-u_n)$  tend vers  $+\infty$ .

On a les mêmes notations qu'à la Définition 2.

p. 20

**Proposition 10.** On suppose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

- (i)  $(u_n)$  est minorée.
- (ii)  $(u_n)$  est strictement positive à partir d'un certain rang et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$ .
- (iii) Soit  $(v_n)$  une suite numérique.
  - Si  $(v_n)$  est convergente ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = +\infty$ .
  - Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$ .

**Exemple 11.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

p. 29

## 2. Convergence de suites réelles

Le résultat suivant justifie de se ramener au cas réel lors de l'étude de la convergence des suites numériques.

p. 20

**Proposition 12.** Soient  $(x_n), (y_n)$  deux suites réelles et  $x, y$  deux réels. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + iy_n = x + iy \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y \end{cases}$$

On se place pour le restant de la sous-section dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Théorème 13** (des gendarmes). Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites réelles de même limite  $\ell \in \mathbb{R}$  telles qu'à partir d'un certain rang, on ait  $a_n \leq u_n \leq b_n$ . Alors,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

**Définition 14.**  $(u_n)$  est dite **croissante** (resp. **décroissante**) si pour tout entier  $n$ , on a  $u_{n+1} \geq u_n$  (resp.  $u_{n+1} \leq u_n$ ). Elle est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

**Théorème 15** (de la limite monotone). Si  $(u_n)$  est croissante et majorée ou décroissante et minorée, alors elle est convergente.

**Théorème 16** (Suites adjacentes). Si deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes (ie.  $(u_n)$  est croissante,  $(v_n)$  est décroissante et la suite différence tend vers 0), alors elles sont convergentes de même limite  $\ell$  qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$$

**Exemple 17.** Les suites  $(1 - \frac{1}{n})$  et  $(1 + \frac{1}{n^2})$  sont adjacentes et convergent vers 1.

**Corollaire 18** (Segments emboîtés). Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites réelles telles que

p. 36

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \\ (b_n - a_n) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Alors, il existe un nombre réel unique  $\ell$  tel que  $\bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n] = \{\ell\}$ .

**Application 19** (Critère de Leibniz). Soit  $(a_n)$  une suite à termes positifs, décroissantes,

p. 97

tendant vers 0. Alors

$$\sum (-1)^n a_n \text{ converge} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

(voir Section 2.)

**Définition 20.** Pour cette définition, on ne suppose pas au cas réel.

— On dit que  $(u_n)$  est **négligeable** devant une suite réelle positive  $(\alpha_n)$  et on note  $u_n = o(\alpha_n)$  si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq \epsilon \alpha_n$$

— On dit que  $(u_n)$  est **équivalente** à une suite numérique  $(v_n)$  et on note  $u_n \sim v_n$ , si  $(u_n - v_n)$  est négligeable devant  $(|u_n|)$ .

p. 25

**Proposition 21.** En reprenant les notations précédentes,

- (i) On suppose  $(\alpha_n)$  non nulle à partir d'un certain rang.  $(u_n)$  est négligeable devant  $\alpha_n$  si et seulement si  $\frac{u_n}{\alpha_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- (ii) On suppose  $(v_n)$  non nulle à partir d'un certain rang.  $(u_n)$  est équivalente à  $v_n$  si et seulement si  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$ .
- (iii)  $\sim$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites de  $\mathbb{K}$ .

**Exemple 22** (Formule de Stirling).

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

p. 353

**Proposition 23.** Deux suites convergentes équivalentes ont la même limite.

p. 28

### 3. Suites de Cauchy

**Définition 24.** On dit que  $(u_n)$  est **de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq N, |u_p - u_q| < \epsilon$$

p. 34

**Proposition 25.** (i) Une suite convergente est de Cauchy.

(ii) Une suite de Cauchy est bornée.

**Théorème 26.** Toute suite de Cauchy de  $\mathbb{K}$  est convergente dans  $\mathbb{K}$ .

**Contre-exemple 27.** La série  $\sum \frac{1}{n}$  est une suite de Cauchy de  $\mathbb{Q}$  non convergente dans  $\mathbb{Q}$ .

[HAU]  
p. 312

## 4. Convergence au sens de Cesàro

**Définition 28.** À toute suite numérique  $(u_n)$  on y associe sa suite  $(v_n)$  des **moyennes de Cesàro** où

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

[AMR11]  
p. 53

**Théorème 29.** Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{K}$ , alors sa suite des moyennes de Cesàro converge vers  $\ell$ . On dit que  $(u_n)$  converge **au sens de Cesàro**.

**Exemple 30.** — Soit  $(v_n)$  une suite numérique dont aucun terme n'est nul, qui converge vers  $\ell \neq 0$ . Alors,

$$\frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{v_k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell}$$

converge vers  $\frac{1}{\ell}$ .

— Soit  $(w_n)$  une suite numérique telle que  $(w_{n+1} - w_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{K}$ . Alors,

$$\frac{w_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

*Remarque 31.* La réciproque du Théorème 29 est fausse.

**Exemple 32.**  $(-1)^n$  converge au sens de Cesàro vers 0, mais pas au sens usuel.

## II - Valeurs d'adhérence

### 1. Suites extraites

**Définition 33.** On appelle **sous-suite** ou **suite extraite** de  $(u_n)$ , toute suite  $(u_{\varphi(n)})$  où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante (on dit que  $\varphi$  est une **extractrice**).

p. 14

**Proposition 34.** Si une suite converge vers  $\ell \in \mathbb{K}$ , alors toute suite extraite converge vers  $\ell$ .

**Définition 35.** On appelle **valeur d'adhérence** d'une suite numérique, tout élément de  $\mathbb{K}$  limite d'une de ses sous-suites convergentes.

*Remarque 36.* — Toute suite numérique convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence.

— Une suite possédant une unique valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente.

**Exemple 37.**  $((1 - (-1)^n)n)$  ne possède que 0 comme valeur d'adhérence, mais ne converge pas.

**Théorème 38** (Bolzano-Weierstrass). Toute suite numérique bornée possède au moins une sous-suite convergente.

p. 36

**Proposition 39.** Une suite numérique est convergente si et seulement si elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

[DAN]  
p. 73

**Application 40.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique compact. Soit  $(v_n)$  une suite de  $E$  telle que  $d(v_n, v_{n-1}) \rightarrow 0$ . Alors l'ensemble  $\Gamma$  des valeurs d'adhérence de  $(v_n)$  est connexe.

[I-P]  
p. 116

**Corollaire 41** (Lemme de la grenouille). Soient  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue et  $(x_n)$  une suite de  $[0, 1]$  telle que

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Alors  $(x_n)$  converge si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ .

## 2. Limites inférieure et supérieure

On se place dans le cas réel pour toute cette sous-section.

[AMR11]  
p. 93

**Lemme 42.** Si  $(u_n)$  n'est pas bornée, on peut extraire une sous-suite qui tend vers  $\pm\infty$  :  $\pm\infty$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Définition 43.** On appelle **limite inférieure** (resp. **limite supérieure**) de  $(u_n)$ , notée  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$  (resp.  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ) la plus grande (resp. plus petite) de ses valeurs d'adhérence.

[DAN]  
p. 77

**Proposition 44.**  $(u_n)$  converge si et seulement si  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### III - Suites particulières

#### 1. Suites récurrentes

**Définition 45.** Soit  $E \subseteq \mathbb{K}$ . On dit que  $(u_n)$  est **récurrente** d'ordre  $h \in \mathbb{N}^*$  si on peut écrire

$$\forall n \geq h, u_{n+h} = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h}) \quad (*)$$

où  $f : E^h \rightarrow E$  et les premières valeurs  $u_0, \dots, u_{h-1} \in E$  étant donnés.

[GOU20]  
p. 200

**Théorème 46** (Caractérisation séquentielle de la continuité). En reprenant les notations précédentes, une fonction  $g : E \rightarrow \mathbb{K}$  est continue si et seulement si pour toute suite numérique convergente  $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$  dont on note  $\ell$  la limite,  $g(v_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

[AMR11]  
p. 38

**Corollaire 47.** Si une suite récurrente d'ordre 1 (dont on note  $f$  la fonction) converge vers  $\ell$ , alors  $f(\ell) = \ell$ .

**Exemple 48.** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \sin(u_n)$  converge vers 0.

**Application 49** (Méthode de Newton). Soit  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  strictement croissante sur  $[c, d]$ . On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{l} [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{g(x)}{g'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car  $g' > 0$ ). Alors :

- (i)  $\exists ! a \in [c, d]$  tel que  $g(a) = 0$ .
- (ii)  $\exists \alpha > 0$  tel que  $I = [a - \alpha, a + \alpha]$  est stable par  $\varphi$ .
- (iii) La suite  $(x_n)$  des itérés (définie par récurrence par  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  pour tout  $n \geq 0$ ) converge quadratiquement vers  $a$  pour tout  $x_0 \in I$ .

[ROU]  
p. 152

**Corollaire 50.** En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus  $g$  strictement convexe sur  $[c, d]$ , le résultat du théorème est vrai sur  $I = [a, d]$ . De plus :

- (i)  $(x_n)$  est strictement décroissante (ou constante).

[DEV]

$$(ii) \quad x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ pour } x_0 > a.$$

**Exemple 51.** — On fixe  $y > 0$ . En itérant la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right)$  pour un nombre de départ compris entre  $c$  et  $d$  où  $0 < c < d$  et  $c^2 < 0 < d^2$ , on peut obtenir une approximation du nombre  $\sqrt{y}$ .

— En itérant la fonction  $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$  pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

## 2. Séries numériques

**Définition 52.** — On appelle **série** de terme général  $u_n$  la suite  $(S_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + \dots + u_n$$

On note cette série  $\sum u_n$ .

—  $u_n$  s'appelle le **terme** d'indice  $n$ .

—  $S_n$  s'appelle la **somme partielle** d'indice  $n$ .

[GOU20]  
p. 208

**Définition 53.** En reprenant les notations précédentes, on dit que  $\sum u_n$  **converge** si la suite  $(S_n)$  converge. Dans ce cas, la limite s'appelle la **somme** de la série, et on la note  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

**Proposition 54.** Si  $\sum u_n$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

[AMR11]  
p. 81

**Contre-exemple 55.** La réciproque est fautive, par exemple en considérant la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ , on a  $\sum_{k=1}^n u_k = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Proposition 56.** Muni des opérations :

$$— \forall (u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sum u_n + \sum v_n = \sum (u_n + v_n),$$

$$— \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lambda \sum u_n = \sum (\lambda u_n),$$

l'ensemble des séries numériques est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  dont l'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel.

**Proposition 57** (Règle de d'Alembert). Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

[GOU20]  
p. 214

Alors :

- (i) Si  $\lambda < 1$ ,  $\sum u_n$  converge.
- (ii) Si  $\lambda > 1$ ,  $\sum u_n$  diverge.

**Exemple 58.**  $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  converge.

[AMR11]  
p. 94

**Exemple 59.**  $\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{n!}$  donne une valeur approchée de  $e$  à moins de  $3 \times 10^{-8}$  près par défaut.

p. 108

**Proposition 60** (Règle de Cauchy). Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs telle que

[GOU20]  
p. 214

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

Alors :

- (i) Si  $\lambda < 1$ ,  $\sum u_n$  converge.
- (ii) Si  $\lambda > 1$ ,  $\sum u_n$  diverge.

**Exemple 61.**  $\sum \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$  converge.

[AMR11]  
p. 112

**Lemme 62.** Soit  $\alpha > 1$ . Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a

[I-P]  
p. 380

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

[DEV]

**Proposition 63** (Développement asymptotique de la série harmonique). On note  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Alors, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

# Bibliographie

## **Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions**

[AMR11]

Mohammed EL-AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 15 nov. 2011.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332195-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **Les Contre-Exemples en Mathématiques**

[HAU]

Bertrand HAUCHECORNE. *Les Contre-Exemples en Mathématiques*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juin 2007.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/5328-les-contre-exemples-en-mathematiques-9782729834180.html>.

## **L'oral à l'agrégation de mathématiques**

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## **Petit guide de calcul différentiel**

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.