

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Dans toute la suite, \mathbb{K} désignera le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I - Généralités

1. Définitions

Définition 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace de Banach et $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E^n$ un ouvert. Soit $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ une fonction.

— On appelle **équation différentielle** une équation de la forme

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

(ie. une équation portant sur les dérivées d'une fonction.)

— Toute application $\varphi : I \rightarrow E$ (où I est un intervalle de \mathbb{R}) n fois dérivable vérifiant :

(i) $\forall t \in I, (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega;$

(ii) $\forall t \in I, F(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t);$

est une **solution** de (*). On note \mathcal{S}_* l'ensemble des solutions de (*).

— Une solution $\varphi : I \rightarrow E$ de (*) est dite **maximale** s'il n'existe pas d'autre solution $\psi : J \rightarrow E$ (où J est un intervalle de \mathbb{R}) de (*) telle que $I \subseteq J, I \neq J$ et $\psi = \varphi$ sur I .

— On appelle **problème de Cauchy** de (*) en $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$ la recherche d'une solution $\varphi : I \rightarrow E$ de (*) vérifiant

$$\forall t_0 \in I, \varphi(t_0) = x_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

[GOU20]
p. 373

Définition 2. Toute équation différentielle sur \mathbb{K}^n d'ordre $p \geq 1$ du type

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t) \quad (L)$$

(où A_{p-1}, \dots, A_0 sont des fonctions continues d'un intervalle I de \mathbb{R} non réduit à un point dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ est une fonction continue) est appelée **équation différentielle linéaire** d'ordre p .

Si de plus $B = 0$, alors (L) est qualifiée d'**homogène**.

p. 377

Définition 3. Si $n \geq 2$, on parle de **système différentiel linéaire**. Si $n = 1$, on parle d'équation différentielle linéaire **scalaire**.

Remarque 4. L'équation (L) précédente peut aussi s'écrire :

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \dots & \dots & \dots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ B(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous avons ramené l'équation différentielle linéaire (L) d'ordre p à une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Donc, pour cette raison, on peut se limiter à l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

2. Structure de l'ensemble des solutions

[DEV]

Théorème 5 (Cauchy-Lipschitz linéaire). Soient $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^d$ deux fonctions continues. Alors $\forall t_0 \in I$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

[DAN]
p. 520

Remarque 6 (Version linéaire d'ordre p). Soient A_{p-1}, \dots, A_0 des fonctions continues d'un intervalle I de \mathbb{R} non réduit à un point dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction continue. Soient $X_0, \dots, X_{p-1} \in \mathbb{K}^n$. Alors, $\forall t_0 \in I$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t) \\ Y^{(k)}(t_0) = X_k \end{cases} \quad \forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

[GOU20]
p. 378

Exemple 7. Considérons l'équation $y' - y = 0$. Comme la fonction nulle est solution maximale, il s'agit de l'unique solution qui s'annule sur \mathbb{R} .

[ROM19-1]
p. 402

Corollaire 8. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p défini sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension np .

[GOU20]
p. 278

Corollaire 9. Soit (H) l'équation différentielle linéaire homogène associée à une équation différentielle linéaire (L) et soit $V_0 \in \mathcal{S}_L$. Alors $\mathcal{S}_L = V_0 + \mathcal{S}_H$, et \mathcal{S}_L est un espace affine de même dimension que \mathcal{S}_H .

3. Wronskien

Définition 10. Soient V_1, \dots, V_n n solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (H) définies sur un intervalle I . On appelle **wronskien** de V_1, \dots, V_n l'application

$$W_{(V_1, \dots, V_n)} : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t)) \end{array}$$

Exemple 11. Soient v_1, \dots, v_p p solutions de $y^{(p)} = a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + a_0(t)y$ définies sur un intervalle I (où $\forall i, a_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue). Alors

$$\forall t \in I, W_{(v_1, \dots, v_p)}(t) = \begin{vmatrix} v_1(t) & \dots & v_p(t) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{(p-1)}(t) & \dots & v_p^{(p-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Exemple 12. Soient u et v deux solutions de $y'' = a(t)y' + b(t)y$ définies sur un intervalle I . Alors

$$\forall t \in I, W_{(u, v)}(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$$

Proposition 13. Le rang de n solutions d'une équation différentielle linéaire homogène $V_1(t), \dots, V_n(t)$ est indépendant de t .

Corollaire 14. Soient V_1, \dots, V_n n solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (H) . Alors (V_1, \dots, V_n) est une base de \mathcal{S}_H si et seulement si $\exists t_0$ tel que $W_{(V_1, \dots, V_n)}(t_0) \neq 0$.

Proposition 15. Soient V_1, \dots, V_n n solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (H) . Alors $W_{(V_1, \dots, V_n)}$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$Y' = \text{trace}(A)Y$$

et pour tout t_0 élément de I , on a $\forall t \in I, W_{(V_1, \dots, V_n)}(t) = W_{(V_1, \dots, V_n)}(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{trace}(A(u)) du\right)$.

II - Résolution

1. Cas d'une équation différentielle linéaire scalaire

Proposition 16. Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire $y' = a(t)y$ sont proportionnelles à $t \mapsto e^{A(t)}$ où A est une primitive de a .

Corollaire 17 (Variation de la constante). Soient $(L) : y' = a(t)y + b(t)$ une équation différentielle linéaire scalaire et A une primitive de a . Alors,

$$\mathcal{S}_L = \{t \mapsto \lambda(t)e^{A(t)} \mid \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}\}$$

Exemple 18. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(L) : y' + y = \sin(t)$ est

$$\mathcal{S}_L = \left\{ t \mapsto \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2} + \mu e^{-t} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple 19. À cause du principe de "recollement" des solutions, la seule solution définie sur \mathbb{R} de $(1 - t^2)y' + ty = 0$ est la fonction nulle.

2. Cas d'un système différentiel linéaire

Proposition 20. Soient V_1, \dots, V_n n solutions linéairement indépendantes d'une équation différentielle linéaire homogène $(H) : Y' = A(t)Y$. Alors,

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Corollaire 21 (Variation de la constante). Soit $(L) : Y' = A(t)Y + B(t)$ une équation différentielle linéaire. On note par (H) l'équation différentielle linéaire homogène associée. Alors, si V_1, \dots, V_n sont n solutions de (H) , on a :

$$\mathcal{S}_L = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)V_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i'(t)V_i(t) = B(t) \right\}$$

Exemple 22. Soit $(L) : y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$. On note u et v deux solutions de l'équation

différentielle linéaire homogène associée. Alors,

$$\mathcal{S}_L = \left\{ t \mapsto \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t) \mid \begin{cases} \lambda'u + \mu'v = 0 \\ \lambda'u' + \mu'v' = c \end{cases} \right\}$$

Exemple 23. On considère l'équation différentielle $(L) : y'' + y = \tan(t)$. Alors,

$$\mathcal{S}_L = \left\{ t \mapsto \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) - \cos(t) \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Cas où les coefficients sont constants

Définition 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

l'**exponentielle** de la matrice A .

Proposition 25. Une équation différentielle linéaire homogène $(H) : Y' = AY$ (où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est constante en t) a ses solutions maximales définies sur \mathbb{R} et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution $t \mapsto e^{tA}y_0$.

Remarque 26. En reprenant les notations précédentes, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut réduire A dans \mathbb{C} puis écrire les solutions de (H) sous la forme $\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}$ (où φ est une solution complexe de (H)).

Corollaire 27. On considère une équation différentielle linéaire homogène $(H) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$. On factorise P_H , le **polynôme caractéristique** de l'équation dans \mathbb{C} ,

$$P_H = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = \prod_{i=1}^k (X - r_i)^{m_i}$$

Alors,

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto \sum_{i=1}^k e^{r_i t} P_i(t) \right\}$$

où les P_i sont des polynômes de degré $< m_i$.

Exemple 28. On considère l'équation différentielle $(H) : y'' + ay' + by = 0$. Soient r_1 et r_2 les deux racines de P_H dans \mathbb{C} .

- Si $r_1 \neq r_2$, $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$.
- Si $r_1 = r_2$, $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_1 t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$.

4. Quelques autres techniques de résolution

a. Abaissement de l'ordre

Proposition 29. On considère une équation différentielle linéaire homogène $(H) : y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_H$, alors $f = g\varphi$ est solution de (H) si et seulement si

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} g^{(k)} \varphi^{(n-k)} = a_{n-1}(t) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)} \varphi^{(n-1-k)} + \dots + a_1(t)(g'\varphi)$$

ie. g' est solution d'une équation différentielle d'ordre $n-1$.

Exemple 30. Soit φ une solution de $(H) : y'' = a(t)y' + b(t)y$, alors $f = g\varphi$ est solution de (H) si et seulement si $2g'\varphi' + g''\varphi = a(t)g'\varphi$.

b. Utilisation des séries entières

Proposition 31. Soient a_0, \dots, a_{p-1} et b des fonctions à valeurs dans \mathbb{K} développables en série entière sur un intervalle ouvert $] -R, R[$ (R étant un réel strictement positif). Soient $y_0, \dots, y_{p-1} \in \mathbb{C}$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y^{(p)} = a_0(t)y + \dots + a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + b(t) \\ y^{(k)}(0) = y_k \end{cases} \quad \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad (*)$$

Alors $(*)$ admet une unique solution développable en série entière sur $] -R, R[$.

Exemple 32. La fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

[ROM19-1]
p. 401

Application 33. La fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est développable en série entière de rayon de convergence 1 et

$$\forall x \in]-1, 1[, f_\alpha(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

III - Études qualitatives

Lemme 34 (Grönwall). Soient $\varphi, \psi, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues vérifiant $\forall t \in [a, b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s) ds$. Alors,

[GOU20]
p. 397

$$\forall t \in I, y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds$$

Corollaire 35. Soient $\varphi, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues et vérifiant $\exists c \geq 0, \forall t \in [a, b], y(t) \leq c + \int_a^t \varphi(s)y(s) ds$. Alors,

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \varphi(s) ds\right)$$

Application 36. Soit $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ croissante de classe \mathcal{C}^1 . Alors les solutions de $y'' + q(t)y = 0$ sont bornées sur \mathbb{R}^+ .

Théorème 37 (Floquet). On considère l'équation $(H) : Y' = A(t)Y$ où $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue et T -périodique. Alors, (H) admet une solution V non nulle telle que

p. 387

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, V(t+T) = \lambda V(t)$$

Théorème 38 (Massera). Si l'équation $Y' = A(t)Y + B(t)$ (où A et B sont T -périodiques) admet une solution bornée sur \mathbb{R} , alors elle admet une solution T -périodique.

p. 406

IV - Applications

1. Résolution d'équations différentielles non linéaires

Application 39 (Équations de Bernoulli). Soit $(B) : y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$). On pose $z = y^{1-\alpha}$ et on a

p. 391

$$(B) \iff \frac{1}{1-\alpha} z' = a(t)z + b(t)$$

Corollaire 40 (Équations de Ricatti). Soit $(R) : y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$ qui admet pour solution particulière φ_0 . On pose $y = \varphi_0 + z$ et on a

$$(R) \iff (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))z + a(t)z^2$$

qui est une équation de Bernoulli.

Exemple 41. Les solutions maximales de l'équation $y' + y + y^2 + 1 = 0$ sont de la forme $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{e^{i(\sqrt{3}t+\theta)+i}}$, définies que des intervalles ouverts de longueur $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

2. Stabilité

Application 42 (Théorème de stabilité de Liapounov). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(0) = 0$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Si toute valeur propre complexe de df_0 est de partie réelle strictement négative, alors $\forall y_0$ suffisamment proche de 0, la solution maximale $y(t)$ est bien définie et converge vers 0 en $+\infty$ à une vitesse exponentielle.

[I-P]
p. 302

3. Étude d'équations fonctionnelles et matricielles

Application 43. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t > 0, f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $t^2 y'' + y = 0$.

[GOU20]
p. 384

Lemme 44. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe une fonction polynômiale $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ tels que $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda t} P(t)$.

[I-P]
p. 177

[DEV]

Application 45 (Équation de Sylvester). Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Bibliographie

Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332195-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Éléments d'analyse réelle

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2^e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.