Leçon 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1 Différentes notions d'indépendance

1.1 Évènements indépendants

Définition 1 (KUR 49)**.** Soient B un évènement de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle sachant B l'application $\mathbb{P}(.|B) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}; A \mapsto \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Proposition 2 (KUR 49)**.** L'application probabilité conditionnelle est une probabilité.

Définition 3 (BL 73)**.** Deux évènements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 4 (EXE 2)**.** Soient $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$. Si $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$, on a les équivalences :

$$\text{A et B sont indépendants} \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

>0 pour que proba cond soient bien def

Exemple 5 (BL 75)**.** On jette un dé bleu et un dé rouge. On considère les évènements $A = \{\text{On obtient un nombre inférieur ou égale à 4 avec le dé rouge}\}$ et $B = \{\text{On obtient 6 avec le dé rouge}\}$. On a $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{4}{36}$ donc A et B sont indépendants.

Si détail en question, penser à poser l'espace probabilisé, poser le Ω tout ça

Proposition 6 (BL 74 blabla avant def)**.** Si A et B sont indépendants, A et B^C sont indépendants.

Définition 7 (BL 74)**.** Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements de $\mathcal{A}$. On dit que cette famille est mutuellement indépendante si pour tout $J \in I$ fini on a :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$$

Contre-exemple 8 (HAUCH 356)**.** On s'intéresse au lancé d'un dé tétraédrique où les faces sont numérotés de 1 à 4. On note définit les évènements : $A = \{\text{obtenir 1 ou 2}\}$, $B = \{\text{obtenir 1 ou 3}\}$ et $C = \{\text{obtenir 2 ou 3}\}$. Ces évènements sont 2 à 2 indépendants. Cependant $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$ donc A,B,C ne sont donc pas mutuellement indépendants. Ceci fournit un contre-exemple au fait qu'une famille d'éléments 2 à 2 indépendants n'est pas focément indépendantes.

1.2 Variables aléatoires

Définition 9 (BL 74)**.** Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On dit que cette famille est mutuellement indépendantes si toute famille d'évènement $A_i \in \mathcal{A}_i$ pour $i \in I$ est mutuellement indépendante.

Définition 10 (BL 76)**.** Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$. On dit que cette famille est (mutuellement) indépendante si la famille des tribus $(\sigma(X_i))_{i\in I}$ engendrées par les X_i est (mutuellement) indépendante. Autrement dit, si pour tout $J \subset I$ fni et tous $B_j \in \mathcal{B}$ pour tout $j \in J$,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j\in J} X_j \in B_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(X_j \in B_j)$$

Proposition 11 (BL 77)**.** Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}_{(X_1,...,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes ... \otimes \mathbb{P}_{X_n}$

Proposition 12 (KUR 126)**.** Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$

Proposition 13 (GOU 336)**.** Soient X et Y des variables aléatoires discètes. X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Exemple 14. Reprenons l'exemple 5 et notons X_1, X_2 les variables aléatoires donnant la valeur du dé bleu et rouge respective. Alors X_1 et X_2 sont indépendantes. Cependant la famille $(X_1, X_2, X_1 + X_2)$ n'est pas indépendante.

Proposition 15 (GOU 337)**.** Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, et f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2 Lien avec les moments

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

2.1 Espérance de vairables aléatoires indépendantes

Définition 16 (KUR 159)**.** Si X est intégrable, on appelle espérance de X, noté $\mathbb{E}(X)$,le réel $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(w) d\mathbb{P}(w)$

Proposition 17 (KUR 175)**.** Si X et Y sont intégrables et indépendantes, alors, leur produit XY est une variable aléatoire intégrable et son espérance est $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Proposition 18 (BL 79)**.** [à voir avec celui au desssus si je laisse les deux ou pas] Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires réelles. $(X_i)_{i\in I}$ est indépendante si et seulement si pour toute famille finie $J \subset I$ et toute famille finie de fonctions boréliennes $(f_i)_{i\in I}$ telles que $f_i(X_i)$ soit intégrable pour tout i, on a $\mathbb{E}(\prod\limits_{i\in J} f_i(X_i)) = \prod\limits_{i\in J} \mathbb{E}(f_i(X_i))$

2.2 Varaiance de variables aléatoires indépendantes

Définition 19 (KUR 172)**.** Si X et Y admettant chacun un moment d'ordre 2. On appelle covariance du couple (X, Y) le réel $cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Définition 20 (KUR 174)**.** X et Y sont dites non corrélées si $cov(X, Y) = 0$ et sont dites corrélées si $cov(X, Y) \neq 0$

Proposition 21 (KUR 176)**.** Si X et Y sont indépendantes alors elles sont non corrélées.

Contre-exemple 22 (HAUCH 360, KUR 176)**.** Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$. On pose $Y = X^2$. X et Y sont non corrélées car $\mathbb{E}(XY) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Cependant X et Y ne sont pas indépendantes : $\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$

Proposition 23. Si X et Y sont indépendantes de carré intégrable, alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$

3 Somme de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

Proposition 24 (KUR 236)**.** Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Exemple 25 (KUR 238)**.** [no ref, pour dev2] Si X et Y sont indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre λ et μ, alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
Si $(X_i)_i$ est un suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées loi de Poisson de paramètre λ, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

Proposition 26 (GOU 347, KUR 260)**.** [Formule de Wald] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoires et indépendantes de Ω sur $\mathbb{N}$, identiquement distribuées. Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire indépendante des X_n. On note $S_N(w) = \sum_{n=1}^{N(w)} X_n(w)$. Alors la série génératrice de S_N est $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$

Application 27 (EXE p 72)**.** [processus de Galton Watson][DVPMT 2] Soit $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire idépendante identiquement distribué à valeur dans $\mathbb{N}$. On définit $Z_0 = 1$ et pour tout $n \leq 1$, $Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}$. On pose $m = \mathbb{E}(\xi_1^{(0)})$ et on définit l'évènement d'extinction noté ext comme étant $\{\exists n > 0 | Z_n = 0\}$. Alors :

- $m \leq 1$ et $\xi_1^{(0)}$ n'est pas égale à 1 p.s. implique que $\mathbb{P}(ext) = 1$
- $m > 1$ ou $\xi_1^{(0)}$ set p.s. égale à 1 implique $\mathbb{P}(ext) \in [0, 1[$

Exemple 28 (EXE p 72)**.** Ce processus peut modéliser l'extinction d'un nom de famille.

Proposition 29 (KUR 243)**.** Si X et Y sont indépendantes, alors $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$

Application 30 (NO ref)**.** Soit $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Alors $X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

4 Théorèmes limites utilisant l'indépendance

On considère $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réellees et X une variable aléatoire réelle.

4.1 Borel Cantelli

Notation 31. Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements indépendants. On écrit $\{A_n \text{infiniment souvent}\}$ ou $\{A_n i.s.\}$ pour $\limsup_{n\to+\infty} A_n$

Lemme 32 (BL 93)**.** [DEV1] Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements.

1. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(A_n i.s.) = 0$
2. Si $(A_n)_n$ est indépendante, alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \implies \mathbb{P}(A_n i.s.) = 1$$

Corollaire 33 (BL)**.** [DEV1]

1. Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.
2. Si les $(X_n)_n$ sont mutuellement indépendant, on a :

$$X_n \xrightarrow{p.s.} 0 \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty, \forall \varepsilon > 0$$

Application 34 (DEV 1)**.** Il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $\mathbb{P}(\text{multiple de n}) = \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4.2 Loi des grands nombres

Théorème 35 (KUR 269)**.** [Loi faible des grands nombres] Soit $(X_n)_{n\leq 1}$ une suite de variable aléatoires de même loi 2 à 2 indépendantes, admettant un moment d'ordre 2. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge vers $\mathbb{E}(X_1)$ dans L^2 (et donc en probabilité).

De base pour non corrélées mais donc en part pour indep

Théorème 36 (KUR 270)**.** [loi forte des grands nombres] Soit $(X_n)_{n\leq 1}$ une suite de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes et identiquement distribuées, admettant un moment d'ordre 1. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge vers $\mathbb{E}(X_1)$ presque surement.

4.3 Théorème limite central

Théorème 37 (Premier théorème de Lévy, admis)**.** [GAR p306] (Xn) converge en loi vers X ssi ϕ_{X_n} converge vers ϕ_X.

Théorème 38 (GAR 307)**.** [Pas même énoncé car preuve par <3] Soit (X_n) indépendantes et identiquements distribuées admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\sqrt{n}\left(\frac{X1 + \ldots + Xn}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbb{V}(X_1))$$

Application 39 (DEV 2)**.** Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribués qui suivent une loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ et $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbb{V}(X_1))$ et on en déduit

$$n! \sim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$