Leçon 264 : Variable aléatoires discrètes. Exemples et applications.

On considèrera dans cette leçon l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(E, \mathcal{F})$ un espace probabilisable.

1 Introduction aux variables aléatoires discrètes

1.1 Définitions

Définition 1 (GOU p335)**.** On appelle variable aléatoire de Ω vers E une application $X : \Omega \to E$ telle que $\forall F \in \mathcal{F}, X^{-1}(F) \in \mathcal{A}$.

Définition 2 (GOU p335)**.** On dit qu'une variable aléatoire X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Définition 3 (GOU p335)**.** Lorsque $X(\Omega)$ est fini on dit que la variable aléatoire X est finie.

Exemple 4 (KUR 138)**.** La variable aléatoire X représentant le résultat du lancer d'un dé non truqué est telle que $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. C'est une variable aléatoire discrète (finie). La loi de ce type de variable aléatoire où tous les éléments de $X(\Omega)$ ont la même probabilité de se produire $\frac{1}{card(X(\Omega))}$ s'appelle loi uniforme. (cf annexe)

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Proposition 5 (GOU p335)**.** La fonction $P_X : \mathcal{F} \to [0, 1], F \mapsto P(X^{-1}(F))$ est alors une probabilité sur $(E, \mathcal{F})$ appelée loi de probabilité de X.

Théorème 6 (KUR 131)**.** [combinaison thm + cor, ajout mot discret dans 2)]

1. Soient X une variable aléatoire discète et D un ensemble fini ou dénombrable inclus dans $\mathbb{R}$ tel que $X(\Omega) \subset D$. On pose, pour $i \in D$, $p_i = \mathbb{P}(X = i)$. Alors : $\mathbb{P}_X = \sum_{i \in D} p_i \delta_i$
2. Soient D un ensemble fini ou dénombrable, et $(p_i)_{i \in D}$ une famille de réels positifs vérifiant $\sum_{i \in D} p_i = 1$. Alors, on peut construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire discète X sur cet espace telle que $\forall i \in D, p_i = \mathbb{P}(X = i)$

Exemple 7 (KUR 139)**.** On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile et on considère X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers effectués.

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = i) = (\frac{1}{2})^{i-1}(\frac{1}{2}), \text{ d'où } \mathbb{P}_X = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^k}$$

La loi de ce type de variable aléatoire X vérifiant $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, s'appelle loi géométrique. (cf annexe)

Proposition 8 (KUR 133)**.** Soient X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et f une fonction quelconque définie sur $X(\Omega)$ fini ou dénombrable. Alors la fonction Y définie par $Y(w) = f(X(w))$ pour tout $w \in \Omega$, est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exemple 9 (KUR 133)**.** [ex classique pq pas] Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$. On pose $Y = X^2$. On a alors $Y(\Omega) = \{0; 1\}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3}$.

1.3 Indépendance

Définition 10 (GOU 336)**.** Deux variables aléatoires discrètes X et Y de Ω vers E sont dites indépendantes si pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Proposition 11 (GOU 336)**.** Soient X et Y des variables aléatoires discètes. X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Définition 12 (GOU 336)**.** Plus générallement, étant donnée une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires discrètes de Ω dans E, on dit que les variables $(X_i)_i$ sont mutuellement indépendantes (ou simplement indépendantes) si pour toute partie finie $J \in I$ et pour toutes parties $(A_j)_{j\in J}$ avec $A_j \subset X_j(\Omega)$ pour tout $j \in J$, on a

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j\in J}\{X_j \in A_j\}) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(X_j \in A_j)$$

Proposition 13 (GOU 336)**.** Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires discrètes de Ω dans E. Les variables $(X_i)_i$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour toute partie finie $J \subset I$, on a

$$\forall (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j(\Omega), \mathbb{P}(\cap_{j\in J}\{X_j = x_j\}) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(X_j = x_j)$$

Proposition 14 (GOU 337)**.** Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, et f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2 Moments d'une variable aléatoire discrète

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes réelles sur Ω.

2.1 Espérance

Définition 15 (GOU 337)**.** On dit que X admet une espérance si la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, on appelle espérance de X la valeur notée $\mathbb{E}(X)$ définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Proposition 16 (GOU 337)**.** Si $A \subset X(\Omega)$, on a $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$.

Proposition 17 (GOU 338)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si X et Y admettant une espérance, alors :

1. $\lambda X + Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
2. Si $X \geq 0$ on a $\mathbb{E}(X) \geq 0$
3. Si $X \leq Y$, on a $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

Ça implique que l'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles sur Ω est un espace vectoriel. L'espérance est une forme linéaire sur cet espace.

Proposition 18 (GOU 338)**.** Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Théorème 19 (GOU 338)**.** [théorème de transfert, dem] Soit $f : E \to \mathbb{R}$. $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la famille $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Exemple 20 (KUR 186 binomiale n=1 ; 236)**.** Considérons X la variable aléatoire associée au lancer d'une pièce de monnaie qui renvoit 1 si on obtient pile et 0 sinon. On a $\mathbb{P}_X = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$. La loi de ce type de variable aléatoire, qui renvoit 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité $1 - p$, s'appelle loi de Bernoulli. (cf annexe)

Proposition 21 (GOU 343)**.** ineg de Markov

2.2 Variance

Définition 22 (GOU 339)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre p lorsque X^p est sommable, ce qui équivaut à dire que X^p admet une espérance. On appelle moment d'ordre p de X la valeur

$$\mathbb{E}(X^p) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^p\mathbb{P}(X = x)$$

équivalence X^p sommable et X^p admet une espérance est du au théorème de transfert

Proposition 23 (GOU 339)**.** Soit $1 \leq q \leq p$. Si X admet un moment d'ordre p alors X admet un moment d'ordre q.

Définition 24 (GOU 340)**.** Soit X une variable aléatoire discète réelle admettant un moment d'ordre 2. On appelle variance de X la valeur notée $\mathbb{V}(X)$ définie par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

Proposition 25 (GOU 340)**.** Si X admet un moment d'ordre 2, alors :

1. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ (théorème de Köenig-Huygens)
2. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

Exemple 26 (GAR 186, GOU 341)**.** Considérons X la variable aléatoire associée à n lancers indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoit le nombre de pile obtenu. Supposons la pièce de monnaie déséquilibrée de sorte que la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. On a $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$. $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} k p^k (1-p)^{n-k} = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$. La loi de ce type de variable aléatoire, qui renvoit le nombre de succès de n épreuves où la probabilité du succès est p s'appelle loi binomiale de paramètre n, p. (cf annexe)

3 Fonction génératrice

Dans cette sous-partie, on considèrera des variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 27 (KUR 235)**.** On appelle fonction génératrice de X la fonction définie sur $[-1,1]$ par : $G_X(z) = E(z^X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X=k) z^k$.

Ne pas oublier qu'elle peut être définie sur la boule unité complexe $B(0,1)$.

Remarque 28 (KUR 235)**.** [voir si je laisse] Si X est à support fini, G_X est un polynôme.

Proposition 29. Soit deux variable aléatoire X et Y. $G_X = G_Y$ sur $[0,1]$ si et seulement si elles ont même loi.

Proposition 30 (GOU 346)**.** Si deux variable aléatoire X et Y sont indépendantes, on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Exemple 31 (KUR 238)**.** [no ref, pour dev2] Si X et Y sont indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
Si $(X_i)_i$ est un suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées loi de Poisson de paramètre λ, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

Théorème 32 (KUR 237)**.** Sur $[0,1[$, la fonction $s \mapsto G_X(s)$ est infiniment dérivable et ses dérivées sont toutes positives, avec : $G_X^{(n)}(s) = E(X(X-1)...(X-n+1)s^{X-n})$ En particulier $P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition 33 (GOU 347, KUR 260)**.** [Formule de Wald] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoires et indépendantes de Ω sur $\mathbb{N}$, identiquement distribuées. Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire indépendante des X_n. On note $S_N(w) = \sum_{n=1}^{N(w)} X_n(w)$. Alors la série génératrice de S_N est $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$

Application 34 (EXE p 72)**.** [processus de Galton Watson][DVPMT 2] Soit $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire idépendante identiquement distribué à valeur dans $\mathbb{N}$. On définit $Z_0 = 1$ et pour tout $n \leq 1$, $Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}$. On pose $m = \mathbb{E}(\xi_1^{(0)})$ et on définit l'évènement d'extinction noté ext comme étant $\{\exists n > 0 | Z_n = 0\}$. Alors :
- $m \leq 1$ et $\xi_1^{(0)}$ n'est pas égale à 1 p.s. implique que $\mathbb{P}(ext) = 1$
- $m > 1$ ou $\xi_1^{(0)}$ set p.s. égale à 1 implique $\mathbb{P}(ext) \in [0,1[$

Exemple 35 (EXE p 72)**.** Ce processus peut modéliser l'extinction d'un nom de famille.

4 Convergence en loi

On considère $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réellees et X une variable aléatoire réelle.

Définition 36 (KUR 295)**.** On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée, $E(f(Xn))$ converge vers $E(f(X))$.

Proposition 37 (no ref, BL 123)**.** Soit $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires discrètes à valeur dans D dénombrable ou fini. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si : $\forall x \in D, \mathbb{P}(X_n = x) \to \mathbb{P}(X = x)$

Théorème 38 (Premier théorème de Lévy, admis)**.** [GAR p306] (Xn) converge en loi vers X ssi ϕ_{X_n} converge vers ϕ_X.

Théorème 39 (GAR 307)**.** [Pas même énoncé car preuve par <3] Soit (X_n) indépendantes et identiquements distribuées admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\sqrt{n}\left(\frac{X1+...+Xn}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbb{V}(X_1))$$

Application 40 (DEV 2)**.** Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribués qui suivent une loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} X_k$ et $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbb{V}(X_1))$ et on en déduit

$$n! \sim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$