NOM : PECATTE Prénom : Timothée Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 914. Décidabilité et indécidabilité : Exemples.

Autre sujet :

I. Introduction :

I.1. Motivations :

Pb 1 : $10^{ème}$ problème de Hilbert

Étant donné un polynôme P n-varié, à coefficient entier, est ce que $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ possède une solution entière ?

Est ce qu'on peut répondre de manière « systématique » ?

But : Définir ce qui peut être calculé par l'homme ou une machine

↳ nécessité d'un modèle de calcul

I.2. Modèles de calcul :

Thèse de Church : Les modèles de calcul « raisonnables » sont équivalents

Déf 2 : Machines de Turing, avec plusieurs variantes :
- nombres de rubans
- taille de l'alphabet
- ruban infini ou bi-infini

Déf 3 : Machines RAM

Description d'un langage assembleur dans un langage mathématique

Suite d'instruction de la forme CHARGER, RANGER, LIRE, ÉCRIRE, $+, \times, -, \div$

Déf 4 : Machines de Turing à compteurs

Déf 5 : Fonctions récursives

Plus petite famille de fonctions contenant S_0 et stable par composition, projection, récurrence et minimisation…

Déf 6 : Modèle de calcul de Herbrand-Gödel.

II. Décidabilité : définitions et premiers exemples

Dans la suite, on prendra comme modèle de calcul les machines de Turing

II.1. Définitions :

Déf 7 : Machines de Turing qui « décide » avec des états d'acceptation,

Déf 8 : Machines de Turing qui « décide » en calculant une fonction dans $\{0,1\}$

Déf 9 :
- Langage récursivement énumérable si reconnu par MT avec états accept.
- Langage récursif si reconnu par MT avec états accept qui s'arrête sur tout entrée

Prop 10 : L est récursif ssi il est reconnu par une machine qui calcule une fonction dans $\{0,1\}$

Ex 11 : $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}, x = 2y\}$ est récursif

Rmq 12 : Si M calcule f, alors le langage $\{(x, f(x))\}$ est récursif.

Déf 13 :
- Un problème est décidable si son langage associé est récursif
- — semi-décidable — récursivement énum

Ex 14 : Savoir si un mot appartient à un langage | rationnel est décidable
| algébrique est décidable

Le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est récursif mais pas algébrique.

Pb 15 : Étant donné une machine de Turing M et un mot w, est ce que la machine M s'arrête sur l'entrée w

Prop 16 : Le pb 15, appelé problème de l'arrêt, est indécidable

Coro 17 : Semi-décidables $\subsetneq$ décidables

Car le pb 15 est semi-décidable.

DÉV 1

II. 2. Réduction :

Déf 18 : On dit que A se réduit à B s'il existe une MT qui s'arrête et qui calcule f tq : $w \in L_A \Leftrightarrow f(w) \in L_B$, on notera $A \leq B$.

Déf 18 bis : Réduction de Turing

Prop 19 : Si B est décidable et que $A \leq B$, alors A est décidable

Coro 20 : Si A est indécidable et que $A \leq B$, alors B est indécidable.

Ex 21 : Le pb de l'arrêt uniforme (M s'arrête-t-elle sur toutes les données) est indécidable car le pb de l'arrêt se réduit à ce problème.

Th 22 : (Rice) Toute propriété non triviale des langages récursivement énumérable est indécidable.

Ex 23 : Les trois langages suivant sont indécidables :
- INFINI $= \{\langle M\rangle \mid M$ est une MT et $\mathcal{L}(M)$ est infini$\}$
- $\{\langle M\rangle \mid M$ est une MT et $1011 \in \mathcal{L}(M)\}$
- $\{\langle M\rangle \mid M$ est une MT et $\mathcal{L}(M) = \Sigma^*\}$

Pb 24 : (PCP) Étant donné un ensemble fini de paires $(u_i, v_i) \in \Sigma^{*2}$, est-ce qu'il existe $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ tq $u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdots u_{i_n} = w = v_{i_1} \cdots v_{i_n}$?

Th 25 : PCP est indécidable

III. Exemples de problèmes décidables et indécidables :

III. 1. Retour sur le $10^{ème}$ problème de Hilbert :

Th 26 : Toute relation et tout ensemble S récursivement énumérable est Diophantien, ie $\exists P$ un polynôme tq $(x_1, \dots, x_n) \in S \Leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_m$ tq $P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$

Pb 27 : Étant donné M une MT, est-ce que $\mathcal{L}(M) = \emptyset$?

Prop 28 : Le pb 27 est indécidable

Coro 29 : Le $10^{ème}$ problème de Hilbert est indécidable

III. 2. Décidabilité de théorie logique :

Déf 30 : Une théorie logique est dite décidable si l'ensemble des formules closes vraies est récursif.

Th 31 : (Presburger) La théorie du premier ordre des entiers munis de l'addition est décidable.

Th 32 : (Tarski) La théorie du premier ordre des entiers munis de l'addition et de la multiplication est indécidable.

III. 3. Autres problèmes de mathématiques :

Pb 33 : Entrée : Un ensemble fini M de matrices 3×3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$
Sortie : Existe-t-il un produit fini $M = M_{i_1} \dots M_{i_n}$ de matrices de M tq l'élément $(3,2)$ de M soit nul ?

Pb 34 : Entrée : Une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$ définie récursivement
Sortie : Cette suite est-elle convergente ?

Pb 35 : Entrée : Une loi de composition interne sur un ensemble, récursive totale.
Sortie : Cette loi est elle associative ?

Prop 36 : Les pbs 33, 34 et 35 sont indécidables.

DÉV 2

III. 4. Systèmes de réécriture :

Déf 37 : Un système de réécriture est donné par un ensemble de règle $l_i \to r_i$ sur des termes. On écrit $s \to^* t$ si on peut passer du terme s au terme t en utilisant ces règles un nombre fini de fois

Pb 38 : Entrée : Un système de réécriture $\mathcal{R}$
Sortie : Est-ce que $\mathcal{R}$ est confluent ? ie est-ce que $t_1 \xleftarrow{*} s \to^* t_2 \Rightarrow \exists t$ tq $t_1 \to^* t \xleftarrow{*} t_2$?

Pb 39 : Entrée : Un système de réécriture $\mathcal{R}$
Sortie : Est-ce que $\mathcal{R}$ est terminant ? ie est-ce que il existe $t_1 \to t_2 \to \dots \to t_n \to \dots$?

Prop 40 : La confluence et la terminaison d'un système sont indécidables.

Lemme 41 : (Newman) Un système terminant est confluent ssi il est localement confluent

Lemme 42 : (Paires critiques) Un système est localement confluent ssi ses paires critiques sont joignables

Coro 43 : La confluence d'un système de réécriture de terme terminant est décidable.

Pb 44 : Entrée : Un système de réécriture sur les mots, w, w' deux mots
Sortie : Est-ce que $w \xleftrightarrow{*} w'$?

Th 45 : Le problème 44, appelé problème du mot ou problème de Thue, est indécidable pour les groupes et les demi-groupes.

Th 46 : Le problème 44, est décidable pour les groupes et demi-groupes abéliens.

III. 5. Grammaires algébriques :

Déf 47 : Pour une grammaire G, on note $L_G(S)$ le langage qu'elle engendre à partir du symbole initial S

Pb 48 : Entrée : Deux grammaires G et G'.
Sortie : Est ce que $L_G(S) \cap L_{G'}(S') = \emptyset$?

Pb 49 : Entrée : Deux grammaires G et G'
Sortie : Est ce que $L_G(S) = L_{G'}(S')$?

Pb 50 : Entrée : Une grammaire G.
Sortie : Est ce que $L_G(S) = \Sigma^*$?

Pb 51 : Entrée : Une grammaire G
Sortie : Est ce que G est ambigüe ?

Prop 52 : Les problèmes 48, 49, 50, 51 sont tous indécidables.

Réfs :
- Calculabilité et décidabilité, J-M. Autebert
- Introduction à l'informatique théorique, Arto Salomaa
- Langages formel, calculabilité et complexité, Olivier Carton
- Introduction to the theory of computation, Michael Sipser