Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Blabla de début (ROU 120) : passerelle entre propriété géométrique et inégalités "de convexité".

Soit E, F deux espacex vectoriels réels.

1 La théorie

1.1 Partie convexe

Définition 1 (TL2 520)**.** Une partie A de E est fite convexe si elle contient le segment joignant deux quelconques de ses points, de qui se traduit :

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \forall \lambda \in [0,1], (a-\lambda)x + \lambda y \in A$$

On renvoit à l'annexe 1

Exemple 2 (TL2 521)**.** La partie vide, un singleton et E tout entier sont toujours convexes.

Exemple 3 (TL2 520)**.** Les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Proposition 4 (TL2 521)**.** Une intersection de convexe est convexe.

Définition 5 (TL2 521)**.** On définit l'enveloppe convexe de S comme l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant S, c'est-à-dire, la plus petite partie convexe de E contenant S.

Définition 6 (TL2 521)**.** On appelle combinaison convexe des points $x_1, ..., x_n \in E$ tout $x \in E$ de la fomre $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où les λ_i sont des réels positifs ou nuls de somme 1.

Proposition 7 (TL2 521)**.** Si $C \subset E$ est convexe, toute combinaison convexe de points de C est dans C.

1.2 Fonction convexe

Considérons C une partie convexe non vide de E. Soit $f : C \to \mathbb{R}$.

Définition 8 (TL2 529)**.** La fonction f est dite convexe si, pour tous $x, y \in C$ et $\lambda \in [0,1]$, on a : $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Si cette inégalité est stricte dès que $x \neq y$ et $\lambda \notin \{0,1\}$, f est dite strictement convexe.

Si ces inégalités sont dans l'autre sens, f est dite concave (resp. strictement concave).

Exemple 9. Une norme est convexe.

Proposition 10 (TL2 529)**.** [lien fonction et parties convexes] Si f est convexe, et $k \in \mathbb{R}$, alors $\{x \in C | f(x) \leq k\}$ et $\{x \in C | f(x) < k\}$ sont des parties convexes.

Exemple 11 (TL2 529)**.** Toute boule d'un espace vectoriel normé est convece.

Définition 12 (TL2 529)**.** L'épigraphe d'une fonction f est l'ensemble $\Gamma := \{(x,t) \in C \times \mathbb{R} | t \geq f(x)\}$.

Proposition 13 (TL2 529)**.** f est convexe si et seulement si l'épigraphe de f est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$.

Proposition 14 (TL2 529)**.** [différent de 2)1) car ici pas hyp différentiable] Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si sa courbe représentative est au dessus de chaucune de ses cordes.(cf annexe 2).

Proposition 15 (TL1 661, TL2 529, ssi (juste 1 inég suffit), Attention se placer dans $\mathbb{R}$ là!!)**.** Supposons $C = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f est convexe si et seulement si pour tous $x < y < z$ $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$. (cf annexe 3)

Proposition 16 (TL2 530)**.** Soient $x_1, ..., x_n \in C$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ des réels de somme 1. Si f est convexe, on a l'inégalité : $f(\lambda_1 x_1 + .. + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n)$.

En particulier, $f(\frac{x_1+...+x_n}{n}) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + ... + f(x_n))$

2 Application à la méthode de Newton

Proposition 17 (ROU 120)**.** [DEV 1] Soit U un ouvert connexe d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé. Soit $f : U \to \mathbb{R}$.

1. Si f est différentiable sur U, on a : f convexe si et seulement si $f(y) - f(x) \geq Df(x)(y-x)$ pour tous $x, y \in U$.
2. Si $E = \mathbb{R}$ et si f est dérivable sur U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on a : f convexe si et seulement si sa dérivée est une fonction croissante sur U.

Interprétation géométrique 18 (ROU 120, TL2 259)**.** Si $E = \mathbb{R}$ cela revient à dire que f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus des tangentes. (cf annexe 4)

Corollaire 19 (TL1 667, TL2 531)**.** [juste 2è point, premier déjà en haut] Supposons encore $E = \mathbb{R}$ et $U = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui est deux fois dérivable est convexe si et seulement si f'' est positif.

Application 20 (ROU 144)**.** [méthode de Newton, DEV 1] Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour tout $n \leq 0$. Alors, f a un unique zéro a et on a :

1. $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge vers a de manière quadratique.
2. Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$, alors pour tout $x_0 \in]a,d]$, $(x_n)_n$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim_{n\to\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

cf annexe 5

3 De la fonction exponentielle à des inégalités remarquables

Dans cette partie, on se donne un entier $n \geq 1$.

Proposition 21 (TL2 532)**.** Les fonctions exponentielles et $-ln$ sont convexe.

Proposition 22 (TL2, ROU 396 cas égalité)**.** Soient $x_1, ..., x_n$ des réels strictements positifs. Pour tout réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de somme 1, on a :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = ... = x_n$

Application 23 (TL2 533)**.** [A voir, au moins avoir en tête] On en déduit l'inégalité arithmético-géométrique qui dit que, sous les même hypothèses, on a :

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

Exemple 24 (ROU 396)**.** Soit V un volume donnée. On cherche à construire un parallélépipède rectangle d'aire minimum. On a, en notant x, y, z les côtés de la boîte, $V = xyz$ et $S = 2(xy + yz + zx)$. On a $V^{-1/3} \leq \frac{1}{3}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = \frac{S}{6V}$. Ainsi $S \geq 6V^{2/3}$ avec égalité si et seulement si $x = y = z$.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(p,q) \in [1, +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 25 (BP 164)**.** Pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{K}$ mesurable, on définit $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Proposition 26 (BP 165, FAR 42)**.** [inégalité de Hölder] On a $\forall f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \forall g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, que $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Proposition 27 (FAR 42)**.** [Inégalité de Minkovski] Soient $f,g \in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Alors $f+g \in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Application 28. $\|.\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.

4 Application aux probabilité

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace probabilisé.

4.1 Inégalité de Jensen

Lemme 29 (KUR 168)**.** Si f est une fonction convexe sur l'intervalle ouvert I, alors pour tous x et t dans I, $f(t) \leq f(x) + f'_d(x)(t-x)$.

Théorème 30 (KUR 169)**.** Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans l'intervelle ouvert I. Soit f une focntion convexe de I dans $\mathbb{R}$. Alors $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$.

Corollaire 31 (KUR 170)**.** Soient f une fonction convexe sur l'intervalle I, $\theta_1,...,\theta_n$ des réels positifs de somme A,$x_1,..,x_n$ des éléments de I. Alors

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\theta_k f(x_k)$$

4.2 Borel Cantelli

Proposition 32 (No ref)**.** La convexité de l'exponentielle donne $1-x \leq e^{-x}$

Application 33 (BL 93)**.** [DEV1] Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements.

1. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(A_n i.s.) = 0$
2. Si $(A_n)_n$ est indépendante, alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \implies \mathbb{P}(A_n i.s.) = 1$$

MANQUE SUITE DE BOREL CANTELLI!!

4.3 Galton Watson

Proposition 34 (EXE p 72)**.** [processus de Galton Watson] Soit $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire idépendante identiquement distribué à valeur dans $\mathbb{N}$. On définit $Z_0 = 1$ et pour tout $n \leq 1$, $Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n}\xi_i^{(n)}$. On pose $m = \mathbb{E}(\xi_1^{(0)})$ et on définit l'évènement d'extinction noté ext comme étant $\{\exists n > 0 | Z_n = 0\}$. Alors :

- $m \leq 1$ et $\xi_1^{(0)}$ n'est pas égale à 1 p.s. implique que $\mathbb{P}(ext) = 1$
- $m > 1$ ou $\xi_1^{(0)}$ set p.s. égale à 1 implique $\mathbb{P}(ext) \in [0,1[$

5 Application à la projection / aux espaces de Hilbert

Dans toute la partie, on considère $(E, <.,.>)$, sauf mention contraire, un espace de Hilbert.

Théorème 35 (HIR 91, OA 95)**.** [DEV1] Soit C un convexe fermé non vide de E. Alors :

$$\forall x \in E, \exists ! y \in C, d(x,y) = d(x,C) := \inf_{c\in C} d(x,c)$$

Ce point est appelé la projection de x sur C et est noté $p_C(x)$. De plus, on a la caractérisation suivante :

$$y = p_c(x) \iff y \in C \text{ et } \forall c \in C, Re(<x-c, y-c>) \leq 0$$

Remarque 36 (formulation dans TL1 536, HIR 92)**.** Ce théorème reste vrai en considérant un espace préhilbertien E et en ajoutant une hypothèse de complétude sur C.

Proposition 37. Soit C un convexe fermé (non vide) d'un espace de Hilbert H. L'application $p_C : x \mapsto p_C(x)$ est $1-$lipchitzienne et en particulier continue.

6 Application en optimisation/ dérivation

Définition 38 (ROU 360)**.**

On dit que f admet en a un maximum global si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in X$.

On dit que f admet un maximum local s'il exiqte un voisinage V de a dans E tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in V \cap X$.

Théorème 39 (TL2 531, relatif -> local ; absolu -> global)**.** Supposons que E soit un evn et que $f : C \to \mathbb{R}$ soit convexe.

1. Si f présente en un point a un minimum local, c'est en fait un minimum global.
2. Si f est strictement convexe, elle présente un minimum en un point au plus, et il s'agit d'un minimum (global) strict

Exemple 40 (OA 28)**.** Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La solution de $Ax = b$ est le minimum global de $J : x \mapsto \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$.