Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

1 Espace préhilbertien $C_{2\pi}$

Définition 1 (ELA 287)**.** Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique s'il existe un nombre réel $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dit que f est de période T si T est le plus petit nombre vérifiant cette relation.

Pour toute fonction périodique, on peut se ramener à une fonction $2\pi-$périodique, $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$.

Notation 2 (TL2 735)**.** On note $C_{2\pi}^{pm}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ $2\pi-$périodique et $C_{2\pi}$ le sous-espace formé des fonctions continue.

Proposition 3. $C_{2\pi}^{pm}$ est un espace vectoriel, et $C_{2\pi}$ un sous-espace vectoriel.

Proposition 4 (ELA 288)**.** Soit $f \in C_{2\pi}^{pm}$. On a $\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Définition 5 (TL2 735)**.** L'espace $C_{2\pi}$ muni du produit scalaire : $<f, g>= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$ est un espace préhilbertien complexe.

Pas définit positive donc pas vraiment produit scalaire. Produit sclaire sur $L^2, C_{2\pi}$

Définition 6 (ELA 289)**.** On définit de même $\|f\|_2 = \sqrt{<f,f>}$ pour tout $f \in C_{2\pi}^{pm}$.

Notation 7 (ELA 292)**.** Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : t \mapsto e^{int}$

base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$

Proposition 8 (ELA 292)**.** $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $C_{2\pi}$.

Définition 9 (ELA 293)**.** On appelle polynôme trigonométrique d'indice $N \in \mathbb{N}$ toute combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(e_n)_{-N\leq n\leq N}$. On note $\mathcal{P}_N$ leur ensemble. et $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques d'indice quelconque.

Proposition 10. $\mathcal{P}_N$ est un sous-espace vectoriel de $C_{2\pi}$ engendré par $(e_n)_{-N\leq n\leq N}$.

2 Série de Fourier

2.1 Séries et coefficients de Fourier

Considérons $f \in C_{2\pi}^{pm}$.

Notation 11 (TL2 735)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$ on définit $e_n : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{int}$

Définition 12 (GOU 268)**.** On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes définis par :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Proposition 13 (GOU 269)**.** $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$

Proposition 14 (ELA 303)**.** Si f est paire (resp. impaire), les coefficients $b_n(f)$ (resp. $a_n(f)$) sont nuls. + formule autre coef!

Exemple 15 (GOU 272)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodique égale à $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$ (cf annexe). f est paire donc $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, $a_0(f) = \frac{4}{3}$ et pour tout $n \leq 1$, on trouve par IPP que $a_n(f) = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}$.

Définition 16 (GOU 269, TL2 736)**.** On appelle série de Fourier associée à f la série trigonométrique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

La $N-$ième somme partielle de la série de Fourier de f est $S_n(f) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$

Exemple 17 (GOU 273)**.** Reprenons l'exemple précédent. La $N-$ième somme partielle de la série de Fourier de f est $\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{cos(nx)}{n^2}$

Proposition 18 (ELA 302)**.** Si f est continue et C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, alors f' est continue par morceaux et $2\pi-$périodique et on a $c_n(f') = inc_n(f)$.

Théorème 19 (ELA 303)**.** Si une série trigonométrique $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_{-n}e_{-n} + c_ne_n)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et de somme f, alors $c_n(f) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2.2 Convolution

On considère dans cette sous-parite $f, g \in C_{2\pi}^{pm}$.

Définition 20 (ELA 308)**.** On définit le produit de convolution de f et g sur $[0, 2\pi]$ par $f * g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-x)g(x)dx$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 21 (ELA 309)**.** On a

1. $f * g$ continue par morceaux $2\pi-$périodique
2. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$
3. $\forall t \in \mathbb{R}$, $f * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)c_n(g)e^{int}$

2.3 Inégalité de Bessel

On considère de nouveau $f \in C_{2\pi}^{pm}$

Proposition 22 (ELA 304)**.** Soit $N \in \mathbb{N}$. La $N-$ième somme partielle de Fourier S_N est l'unique polynôme trigonométrique de P de $\mathcal{P}_N$ tel que la fonction $f - P$ soit orthogonal à $\mathcal{P}_N$.

[ELA 305] Si $f \in C_{2\pi}$ alors $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_N$.

Théorème 23 (ELA 305)**.** On a $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N}|c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt = \|f\|_2^2$

Proposition 24 (ELA 306)**.** On a,

1. la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$
2. de même $\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \leq \|f\|_2^2$

Corollaire 25 (ELA 306)**.** Les coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ tendent vers 0 lorque n tend vers l'infini.

Corollaire 26. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f de classe C^{k-1} et C^k par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors $c_n(f) = o_{n\to\infty}(\frac{1}{|n|^k})$ ainsi que $a_n(f) = o_{n\to\infty}(\frac{1}{n^k})$ et $b_n(f) = o_{n\to\infty}(\frac{1}{n^k})$

2.4 Égalité de Parseval

Théorème 27 (Egalité de Parseval)**.** [ELA 310] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique et continue par morceaux. Alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n(f)|^2$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n(f)|^2$ convergent et on a $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$

Corollaire 28 (TL2 748)**.** Si f, g sont $2\pi-$périodique et continue tels que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f = g$.

Application 29 (TL2 748)**.** Si f est une fonction $2\pi-$périodique continue telle que les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls, alors f est une fonction paire.

Rem GOU 271 : Si la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors f est égale à sa série de Fourier.

Exemple 30 (GOU 273)**.** Reprenons l'exemple 15. On a d'une part : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{x^2}{\pi^2})^2dx = \frac{8}{15}$.
Et d'autre part : $\frac{|a_0(f)|^2}{4}+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)|^2+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|b_n(f)|^2 = \frac{4}{9}+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}$.
Ce calcul nous donne le jolie résultat : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

3 Résultats de convergence

3.1 Approximation ponctuelle

Définition 31 (ELA 311)**.** Soit $N \in \mathbb{N}$. La fonction $D_N := \sum\limits_{k=-N}^{N} e_k$ est appelée le noyau de Dirichlet d'ordre N.

Proposition 32 (ELA 311)**.**
1. D_N est une fonction paire $2\pi-$ périodique et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt = 1$
2. D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}$.
3. Pour $f \in C_{2\pi}^{pm}$, on a $S_N(f) = f * D_N$

Théorème 33 (Dirichlet)**.** [GOU 272, ELA 322] Si f est $2\pi-$périodique et C^1 par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f covnerge en ce point x vers $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Avoir en tête que ça nécessite le lemme de Riemann Lebesgue pour le démontrer

Théorème 34 (ELA 316)**.** Si f est $2\pi-$périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux sur $[0,2\pi]$, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Savoir qu'il existe fonction continue $2\pi-$per dont SF diverge en 0, GOU 275, mais ne pas mettre car dem compliqué

Exemple 35 (GOU 273)**.** Reprenons l'exemple 15. f est continue et C^1 par morceaux donc sa série de Fourier converge uniformément vers f. On a donc, pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{cos(nx)}{n^2}$.
En particulier pour $x = \pi$ on obtient $0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qui donne par suite $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. De même, on obtient en évaluant en $x = 0$ que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

3.2 Approximation uniforme

On considère de nouveau $f \in C_{2\pi}$. Motivation de cette partie : thm dirichlet nécessite régularité forte. Diminue ces condition pour la moyenne de Césaro

Définition 36 (TL2 751)**.** Soit $N \in \mathbb{N}$. La fonction $T_n(f) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k$ est appelée le noyau de Féjer d'ordre N.

Notation 37 (A voir, bouger)**.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n := \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}D_k$

Proposition 38. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $F_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2(\frac{n+1}{2})t}{\sin^2(\frac{t}{2})}$.

Lemme 39 (DEV 1)**.** pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $T_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t-y)F_n(y)dy$

Lemme 40 (ELA F)**.** [DEV 1]
1. $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est positive
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)dt = 1$
3. $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $D_\alpha := [-\pi,-\alpha] \cup [\alpha,\pi]$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{D_\alpha}F_n(t)dt = 0$

Théorème 41 (TL2 752, ELA 408)**.** [Féjèr DEV 1] $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

4 Autre application calculatoire

Définition 42. Les nombres de Bernoulli $(b_n)_n$ sont définis par les coefficients b_n $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$.

Exemple 43 (O-XENS an2 308, DEV 2)**.** On considère φ la fonction 2π-périodique définit pour $x \in]-\pi, \pi]$ par $\varphi(x) = exp(\frac{zx}{2\pi})$. Du développement en série de Fourier de φ, on en déduit le DSE en 0 de $f : z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$.

Application 44 (O-XENS an2 311)**.** $\zeta(2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$

Applications à avoir en tête : équation de la chaleur ; formule de Poisson