Leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

1 Introduction aux séries entières et rayon de convergence

1.1 Séries entières

Définition 1 (GOU 247,TL2 572, TAU 35)**.** On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où z est une variable complexe et où $(a_n)_n$ est une suite de complexe. On dit que a_n est le coefficient d'indice n de la série et que a_0 est le terme constant.

Exemple 2 (TL2)**.** Les fonctions polynomiales s'identifient à des séries entières particulières. celles dont tous les coefficients sont nuls sauf un nombre fini.

Définition 3 (ELA 230)**.** On appelle somme de la série entière $\sum a_n z^n$ l'application S définie en tout point où cela a un sens par

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

j'ai sup les notation des disques, mentionner à l'oral au bon moment

1.2 Domaine de convergence

Proposition 4 (lemme d'Abel)**.** [GOU 247] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :

1. $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente
2. $\forall 0 < r < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} || z| \leq r\}$

Proposition 5 (ELA 230)**.** Il existe un unique nombre R tel que :

1. si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absulement,
2. si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge.

Définition 6 (ELA 231)**.** La propriété précedente justifie la définition de l'élément $R = \sup\{r \in \overline{\mathbb{R}}_+ |$ la suite $(a_n r^n)$ est bornée$\}$ que l'on appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
$D(0, R)$ est appelé le disque de convergence de la série.

Remarque 7 (GOU 248)**.** Le disque de convergence est vide si $R = 0$, et coïncide avec $\mathbb{C}$ si $R = +\infty$.

Remarque 8 (GOU 248)**.** Si $|z| = R$, on ne peut a priori rien dire sur la convergence de $\sum a_n z^n$. Les exemples ci-dessous appuyent ce point.

Exemple 9 (ELA 231)**.**
- Le rayon de convergence de $\sum z^n$ est 1, et cette série diverge si $|z| = 1$
- Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n^2}$ est également 1, mais cette fois, la série diverge si $|z| = 1$
- Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ est 1. Si $|z| = 1$ on a différents cas : si z=1, la série diverge, mais si $z \neq 1$, il existe $\theta \neq 0$ tel que $|1 + e^{i\theta} + ... + e^{in\theta}| \leq \frac{1}{|sin(2\theta)|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la série converge.

Proposition 10 (ELA 238)**.** Une série entière converge normalement sur toute partie compacte incluse dans son disque de convergence.

1.3 Méthodes de calcul du rayon de convergence

Dans cette partie, on s'intéresse au rayon de convergence R d'une série $\sum a_n z^n$.
Pour ce qui concerne le rayon de convergence, on fera la convention que $\frac{1}{R} = +\infty$ si $R = 0$ et $\frac{1}{R} = 0$ si $R = +\infty$.

Proposition 11 (Règle de D'Alembert)**.** [TL2 575, ELA 232] On suppose que $a_n \neq 0$ dès que n est assez grand. Si $|\frac{a_n+1}{a_n}|$ a une limite l quand n tend vers $+\infty$, alors $R = \frac{1}{l}$. (avec les convention si dessus)

Proposition 12 (Formule d'Hadamard)**.** [TL2 577] On a la formule suivante :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$$

Corollaire 13 (Règle de Cauchy)**.** [ELA 233] Si la suite de terme général $|a_n|^{1/n}$ converge vers $L \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors $R = 1/L$.

Exemple 14 (ELA 232-234, TL2 575)**.** Voyons par des exemples comment ces méthodes peuvent être mise en pratiques et en quoi cette diversité est utile

1. Pour la série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ le rayon se calcul facilement avec la règle de d'Alembert :
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$
ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ et $R = +\infty$. Ici la règle de d'Alembert est plus judicieuse car par la méthode de d'Alembert ou de Cauchy, les calculs sont un peu plus difficiles.

2. Considérons désormais $\sum a_n z^n$ où $a_n = 2 + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ prends les valeurs 3 et $\frac{1}{3}$ de façon alterné et n'a donc pas de limite. Cette exemple illustre le fait que la règle d'Alembert ne puisse pas tout le temps s'appliquer et l'utilité d'avoir les autres méthodes. Mais en appliquant la règle d'Hadamard on trouve que $R = 1$.

3. La méthode d'Hadamard est également très utile concernant les séries de suites lacunaires (qui on une infinité de $a_n = 0$). Par exemple Le rayon de la série entière $\sum 2^n z^{2n}$ peut-être calculer grâce à la méthode d'Alembert grâce à un changement de variable du type $Z = z^2$ mais le calcul se fait plus simplement avec la formule de d'Halamard :
$$|a_n|^{1/n} = 2^{1/2} \text{ si n est pair, et } |a_n|^{1/n} = 0 \text{ sinon}$$
donc $\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \sqrt{2}$ et $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Un exemple où la règle de Cauchy est la plus intéressante à appliquer est Prenons $\sum \frac{n}{2^n} z^n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{1/n}}{2} = \frac{1}{2}$.

Proposition 15 (ELA 234)**.** On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ et on notera respectivement R_a et R_b leur rayon de convergence. On a les propriétés de comparaison suivantes :

— Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.

— Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.

— Si $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n$, alors $R_a = R_b$.

1.4 Propriétés/opérations des séries entières et de la somme

Dans cette sous-partie on considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ et on notera respectivement R_a et R_b leur rayon de convergence.

Définition 16 (ELA 235)**.** On appelle :
• série somme la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.
• série produit la série entière $\sum c_n z^n$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
.
• série de produit la série entière $\sum (\lambda a_n) z^n$ ou $\lambda \sum a_n z^n$.

Théorème 17 (ELA 236)**.** • Le rayon de convergence R de la série somme vérifie $R \geq min(R_a, R_b)$, avec égalité si $R_a \neq R_b$. De plus, si $|z| < min(R_a, R_b)$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$$
• En multipliant $\sum a_n z^n$ par $\lambda \neq 0$, on ne change pas le rayon de convergence. De plus si $|z| < R_a$, on a :
$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) z^n$$
•Le rayon de convergence R de la série produit vérifie $R \geq min(R_a, R_b)$. De plus, si $|z| < min(R_a, R_b)$, on a :
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

2 Somme d'une série entière

Dans toute cette partie on considère la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et on notera S sa fonction somme.

2.1 Continuité

Théorème 18 (ELA239)**.** La fonction somme S est continue sur $D(0,R)$.

Exemple 19 (ELA 239)**.** La somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{C}$.

Exemple 20 (pas retrouvé la ref, Sandy)**.** La somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est continue sur $D(0,1)$ mais pas en $z=1$.

Corollaire 21 (ELA239)**.** Pour tout $p \geq 0$, S admet un développement limité à l'ordre p au voisinnage de l'origine dont la partie régulière est donnée par $a_0 + a_1 z + ... + a_p z^p$.

2.2 Intégration

Cette sous-partie concerne uniquement les séries entières à variable réelles. On considèrera alors $\sum a_n x^n$ une série entière complexe de variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$. Intégrale sur C pas def d'où pq réelle

Théorème 22 (ELA 240)**.** Si $[a,b]$ est un segment inclus dans l'intervalle de convergence $]-R,R[$, alors

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx$$

Corollaire 23 (ELA 240)**.** La fonction somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ est continue sur l'intervalle de convergence $]-R,R[$, et ses primitives sont de la forme

$$x \mapsto \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \text{ où } \alpha \in \mathbb{C}.$$

2.3 Dérivabilité

Définition 24 (TAU 39 ,ELA 237)**.** On appelle série entière dérivée la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$.

Proposition 25 (TAU 39, ELA237)**.** Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

Théorème 26 (TAU 39)**.** En tout point z_0 du disque de convergence, la fonction somme S est dérivable et $S'(z_0)$ est égal à la somme de la série entière dérivée en z_0.

Corollaire 27 (TAU 40)**.** Dans le disque de convergence, la fonction somme d'une série entière est indéfiniment dérivable et ses dérivées successives sont les fonctions sommes des séries entières dérivées successives. De plus on a pour tout $z \in D(0,R)$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$S^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$$

3 Fonctions développable en série entière

3.1 Développement en séries entières et développement de Taylor

Définition 28 (TAU 40)**.** Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière au point z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Définition 29 (TL2 594)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ et $a \in \mathring{J}$.
La série $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ est appelée série de Taylor de f en a.

Remarque 30 (TL2 594)**.** Lorsque $a = 0$, c'est une série entière.

Théorème 31 (TAU 40)**.** Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0 et admettant un développement en série entière à l'origine.

1. Il existe un voisinage de 0 sur lequel f est indéfiniment dérivable.
2. Le développement en série entière de f à l'origine est son développement de Taylor.

Corollaire 32 (TAU 40, TL2 594-595)**.**

1. S'il existe, le développement en série entière à l'origine d'une fonction est unique, c'est le développement de Taylor en 0.
2. Si f est développable en série entière à l'origine, ses dérivées successives le sont aussi, et leurs développements sont les séries entières dérivées successives du développement de f.
3. Soient f, g développables en série entière à l'origine et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f+g$, λf, fg sont également développable en série entière à l'oigine.

Contre-exemple 33. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto e^{-n}cos(n^2x)$. Sa somme est C^∞ mais sa série de Taylor a un rayon de convergence nulle.

Une série de Taylor d'une fonction en 0 ayant un rayon de convergence strictement positif peut avoir une somme qui ne coïncide pas avec f dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

Contre-exemple 34. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 pour $x = 0$ et e^{-1/x^2} si $x \neq 0$ a une série de Taylor identiquement nulle qui n'est donc pas égale à f.

3.2 Cas d'une fonction à variable réel

Théorème 35 (TAU 41, GOU 251)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un voisinage de 0. f est développable en série entière à l'origine si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que :

1. f est indéfiniment dérivable sur $]-r, r[$
2. Pour tout $t \in]-r, r[$, la suite $n \mapsto f(t) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)t^k$ admet 0 pour limite.

Si ces conditions sont vérifiées, f coïncide avec la somme de sa série de Mac-Laurin sur $]-r, r[$.

Proposition 36. Soient $r > 0$ et $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ une application indéfiniment dérivable. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|f^{(p)}(t)| \leq M$ pour tout $t \in]-r, r[$ et tout $p \in \mathbb{N}$. Alors, f est développable en série entière à l'origine.

Exemple 37. On retrouve les DSE de certaines fonctions usuelles en annexe 1.

4 Applications

4.1 En combinatoire

[DAN] De nombreux problèmes de combinatoire peuvent se résoudre grâce aux séries entières. En voici deux exemples :

Application 38. Soit n un entier strictement positif. On appelle dérangement du groupe symétrique S_n tout σ de S_n vérifiant pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(k) \neq k$. On note d_n le nombre de dérangements de S_n. Par convention $d_0 = 1$. On a $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Application 39 (DEV1)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ (convention $B_0 = 1$). On a alors $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$

4.2

4.3 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète

Dans cette sous-partie, on considèrera des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 40 (KUR 235)**.** Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction définie sur $[-1, 1]$ par : $G_X(z) = E(z^X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X = k)z^k$.

Proposition 41. Soit deux variable aléatoire X et Y. $G_X = G_Y$ sur $[0, 1]$ si et seulement si elles ont même loi.

Proposition 42 (GOU 346)**.** Si deux variable aléatoire X et Y sont indépendantes, on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Proposition 43 (GOU 347, KUR 260)**.** [Formule de Wald] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoires et indépendantes de Ω sur $\mathbb{N}$, identiquement distribuées. Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire indépendante des X_n. On note $S_N(w) = \sum_{n=1}^{N(w)} X_n(w)$. Alors la série génératrice de S_N est $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$

Application 44 (EXE p 72)**.** [processus de Galton Watson][DEV 2] Soit $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire idépendante identiquement distribué à valeur dans $\mathbb{N}$. On définit $Z_0 = 1$ et pour tout $n \leq 1$, $Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}$. On pose $m = \mathbb{E}(\xi_1^{(0)})$ et on définit l'évènement d'extinction noté ext comme étant $\{\exists n > 0 | Z_n = 0\}$. Alors :

- $m \leq 1$ et $\xi_1^{(0)}$ n'est pas égale à 1 p.s. implique que $\mathbb{P}(ext) = 1$
- $m > 1$ ou $\xi_1^{(0)}$ set p.s. égale à 1 implique $\mathbb{P}(ext) \in [0, 1[$

Exemple 45 (EXE p 72)**.** Ce processus peut modéliser l'extinction d'un nom de famille.

5 Cas complexe DSE : fonctions analytiques

AVOIR EN TÊTE MAIS NE PAS METTRE

Définition 46 (TAU50)**.** On dit qu'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est analytique dans U si elle est développable en série entière en tout point de U.

Exemple 47. $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ car si $a \in \mathbb{C}^*$ et $|z-a| < |a|$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{n+1}}(z-a)^n$$

Théorème 48. Si une série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, sa somme f est analytique sur $D(0, R)$.

A partir de là juste écrit les énoncé, pas revu les démonstrations

Théorème 49 (principe du prolongement analytique)**.** [TAU 52] Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et f analytique sur U. LASSE :

1. f est identiquement nulle dans U
2. f est identiquement nulle dans un voisinage de a.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$

Corollaire 50. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f et g deux focntions analytiques sur U. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, on a $f = g$.