Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Cadre : X désigne un ensemble non vide, $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E, f une fonction de X dans E, $\|.\|_\infty : f \mapsto \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|$

application pour evn quelconque ; fonction pour E= R ou C. R ou C importnat car comme ça complet et toutes dem fonctionnent bien. Savoir que si E pas complet, plus la merde.

1 Les modes de convergences

1.1 Les différentes convergences

Définition 1 (TL2 547, ELA 139)**.** On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X si pour tout $x \in X$, $(fn(x))_n$ converge vers $f(x)$. Autrement dit si :

$$\forall x \in X, \exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

Définition 2 (TL2 549, aussi ELA mais j'aime mieux TL2)**.** On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X si ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall n \leq N, \|f_n(x) - f(x)\| \varepsilon$$

Notation 3 (No ref)**.** On abrègera "convergence simple" par CVS et "convergence uniforme" par CVU.

Proposition 4 (TL2 551)**.** [Critère de Cauchy uniforme] $(f_n)_n$ converge uniformément si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \leq N$ et $q \leq N$ et pour tou $x \in X$, $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$

Exemple 5 (GOU 231)**.** $f_n : x \mapsto x^n$ définit sur $[0, 1]$ CVS sur $[0, 1]$.

Définition 6 (TL2 561, refaire ma sauce)**.** La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est CVS (resp. CVU) si sa suite de somme partielle $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS (resp. CVU). Si la série CVS, la limite $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est appelée la somme de la série.

Exemple 7 (HAU 251)**.** La série $\sum\limits_{n\geq 0} e^{-nx}$ CVS sur $]0, +\infty[$ (comme suite géométrique de raison e^{-x}).

Proposition 8 (TL2 561)**.** $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ CVU si et seulement si elle CVS et que la suite des restes $(R_n)_n$ CVU vers 0.

Contre-exemple 9 (HAU 251)**.** La série de l'exemple 7 ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Définition 10 (TL2 564, ELA 193)**.** On dit que $\sum\limits_{n\leq 0} f_n$ converge normalement (abrégé CVN) si les f_n sont bornées et si la série numérique $\sum_{n\leq 0} \|f_n\|_\infty$ converge.

Définition 11 (ELA 192)**.** On dit que la série $\sum\limits_{n\leq 0} f_n$ converge absolument sur X si pour tout $x \in X$, la série réelle $\sum\limits_{n\leq 0} \|f_n(x)\|$ converge.

Exemple 12 (ELA 214)**.** Posons $f_n : x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ définie sur $[0, +\infty[$ pour tout n. On a, pour tout $x \in [0, +\infty[$ $|\frac{e^{-nx}}{n^2+1}| \leq \frac{1}{n^2+1}$ qui est le terme général d'une série convergente. On en déduite que $\sum f_n$ converge normalement.

1.2 Liens entre ces convergences

Proposition 13 (ELA 140)**.** Si (f_n) CVU sur X vers f, alors elle CVS sur X vers f.

Contre-exemple 14 (GOU 231)**.** Reprenons l'exemple 5. $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. Ceci montre un contre-exemple à la réciproque de la propriété ci-dessus. On peut cependant remarquer que $(f_n)_n$ CVU sur $[0,\frac{1}{2}]$. Ceci montre que la converge uniforme dépend de l'ensemble X considéré.

Proposition 15 (TL2 565, ELA 192, 194)**.** Les liens entre les convergences sont donnés en annexe.

Contre-exemple 16 (HAU 251)**.** Reprenons l'exemple 7. Cette série converge absolument mais elle ne converge pas uniformément, et donc pas non plus normalement.

Contre-exemple 17 (HAUCH 253)**.** Regardons la série $\sum\limits_{n\leq 1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$. Le critère des séries alternés donne la CVS de cette série. De plus, ce critère nous donne que $|R_n| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n}$. Ceci entraîne que la suite des reste CVU, et donc que notre série CVU. Enfin, il est facile de voir qu'elle ne converge ni absolument ni normalement en ayant en tête que $\sum\limits_{n\leq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

2 Régularité et interversion

2.1 Continuité

Dans cette section, X est une partie (non vide) d'un espace vectoriel finie F.

Théorème 18 (ELA 145)**.** Soit $a \in X$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit continue en a. Si (f_n) CVU vers f, alors f est également continue en a.

Contre-exemple 19. Si l'on reprend l'exemple 5, on a une suite de fonctions continue qui CVS vers une fonction pas continue.

Corollaire 20 (ELA 196)**.** Soit $a \in X$. On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue au point a
2. la série $\sum f_n$ CVU sur X

Alors le fonction somme de cette série est continue au point a.

Exemple 21 (ELA 196)**.** Reprenons l'exemple 12. La série CVN donc CVU, et sa somme est donc continue sur $[0,+\infty[$

2.2 Limites

On se place dans le même cadre que la partie précédente.

Théorème 22 (TL2 146)**.** [théorème de la double limite] On suppose $(f_n)_n$ CVU vers f sur X. Soit $a \in \overline{X}$ tel que $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, la limit $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe et

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Contre-exemple 23 (HAU 235)**.** Reprenons l'exemple 5. On a $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = 1$. Or, pour tout $x < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ceci montre que la CVU est indispensable dans notre théorème.

Corollaire 24 (ELA 195)**.** Soit $a \in \overline{X}$. On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, la limite $l_n = \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe.
2. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X.

Alors :

1. la série $\sum l_n$ converge dans E
2. la fonction somme admet une limite en a et on a : $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} l_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$

2.3 Dérivabilité

On suppose ici que $X = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et et que pour tout n, f_n est une fonction dérivables de I dans E.

Théorème 25 (ELA 148)**.** Supposons que $(f_n)_n$ CVS vers f. Si $(f_n')_n$ CVU sur I alors f est dérivable.
Dans ce cas, on a pour tout $x \in I$, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

Corollaire 26 (ELA 197)**.** Supposons que $\sum f_n$ CVS et que $\sum f_n'$ CVU sur I. Alors la fonction somme S est dérivable sur I et on a

$$\forall x \in I, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

S'avoir que s'étend au puissance k

Exemple 27 (ELA 214)**.** On reprend l'exemple 12. Notons f la somme de cette série. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f_n'(x) = (-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}e^{-nx}$. En particulier, sur tout intervalle $[a, +\infty[$ $(a > 0)$, $|f_n'(x)| \leq e^{-na}$ et ainsi $\sum f_n'$ CVU. D'après le théorème on a donc que f est dérivable sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$, et $f'(x) = \sum_{n\leq 0} f_n'(x)$ sur cet intervalle. On en déduit l'égalité sur $]0, +\infty[$.

2.4 Interversion avec l'intégrale

Avoir tête Riemann intégrable On supose que les f_n sont intégrables sur l'intervalle compact $[a, b]$.

Théorème 28 (ELA 151, de mTL2 702)**.** Si $(f_n)_n$ CVU, alors la fonction limite f est intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Avoir en tête que c'est version simple CVD

Corollaire 29 (ELA 207)**.** Si $\sum f_n$ CVU sur $[a, b]$, alors sa somme S est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b g_n(t)dt\right)$$

Contre-exemple 30 (TL2 700)**.** Posons $f_n : x \in [0, 1] \mapsto n^2xe^{-nx}$. $(f_n)_n$ CVS vers 0 sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 f = 0$. Or $\int_0^1 f_n(x) = \int_0^n te^{-t}$ (par changement de variable), qui converge vers 1 quand n tend vers l'infini. Ceci montre encore une fois l'importance de la convergence uniforme.

3 Cas particulier des séries entières

3.1 Généralités

Définition 31 (GOU 247,TL2 572, TAU 35)**.** On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où z est une variable complexe et où $(a_n)_n$ est une suite de complexe. On dit que a_n est le coefficient d'indice n de la série et que a_0 est le terme constant.

Définition 32 (ELA 231)**.** Ne pas faire prop qui implique existence mais l'avoir en tête on appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la valeur

$$R = \sup\{r \in \overline{\mathbb{R}}_+ | \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

$D(0, R)$ est appelé le disque de convergence de la série.

Proposition 33 (ELA 238)**.** Une série entière converge normalement sur toute partie compacte incluse dans son disque de convergence.

Définition 34 (TAU 40)**.** Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière au point z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

3.2 Application combinatoire

[DAN] De nombreux problèmes de combinatoire peuvent se résoudre grâce aux séries entières. En voici deux exemples :

Application 35. Soit n un entier strictement positif. On appelle dérangement du groupe symétrique S_n tout σ de S_n vérifiant pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(k) \neq k$. On note d_n le nombre de dérangements de S_n. Par convention $d_0 = 1$. On a $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Application 36. DEV 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ (convention $B_0 = 1$). On a alors $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$

3.3 Application en probabilités (fonctions génératrices)

Pas place de parler de conv de v.a. mais avoir en tête que c'est conv d'applications.

Dans cette sous-partie, on considèrera des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 37 (KUR 235)**.** Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction définie sur $[-1,1]$ par : $G_X(z) = E(z^X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X=k)z^k$.

Proposition 38. Soit deux variable aléatoire X et Y. $G_X = G_Y$ sur $[0,1]$ si et seulement si elles ont même loi.

Proposition 39 (GOU 346)**.** Si deux variable aléatoire X et Y sont indépendantes, on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Proposition 40 (GOU 347, KUR 260)**.** [Formule de Wald] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoires et indépendantes de Ω sur $\mathbb{N}$, identiquement distribuées. Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire indépendante des X_n. On note $S_N(w) = \sum_{n=1}^{N(w)} X_n(w)$. Alors la série génératrice de S_N est $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$

Application 41 (EXE p 72)**.** [processus de Galton Watson][DEV 2] Soit $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire idépendante identiquement distribué à valeur dans $\mathbb{N}$. On définit $Z_0 = 1$ et pour tout $n \leq 1$, $Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}$. On pose $m = \mathbb{E}(\xi_1^{(0)})$ et on définit l'évènement d'extinction noté ext comme étant $\{\exists n > 0 | Z_n = 0\}$. Alors :

- $m \leq 1$ et $\xi_1^{(0)}$ n'est pas égale à 1 p.s. implique que $\mathbb{P}(ext) = 1$
- $m > 1$ ou $\xi_1^{(0)}$ set p.s. égale à 1 implique $\mathbb{P}(ext) \in [0,1[$

Exemple 42 (EXE p 72)**.** Ce processus peut modéliser l'extinction d'un nom de famille.

4 Pas dans leçon mais avoir en tête

série de Fourier !

Théorème 43 (TL2 559)**.** [Weierstrass] Toute fonction réeelle continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes.

dem : polynôme Berstein

Théorème 44 (gou 238 TL2)**.** [Dini réciprque partielle de CVU => CVS]

1. $(f_n)_n$ croissante fonctions réelles continues sur $[a,b]$ CVS f continue sur $[a,b]$ => CVU
2. (f_n) suite fonction croissantes réelles, continues, def sur $[a,b]$. Si (f_n) CVS vers f continue sur $[a,b]$ => CVU.

1 : suite croissantes =! 2 : fonctions croissantes
idée dem : 1 : suite décroissante de compact non vide ; 2) thm Heine, avec epsilon