Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

1 Propriété de régularité

Dans ce qui suit, $(X, \mathcal{T}, \mu)$ désignera un espace mesuré et (E, d) un espace métrique. On considère une fonction $f : E \times X \to \mathbb{C}$. Lorsqu'elle sera bien définie, on désignera par F la fonction $t \in E \mapsto \int_X f(t,x) d\mu(x)$.

Théorème 1 (théorème de convergence dominée)**.** [FAR 17, BP 140] Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions à valeur dans $\mathbb{K}(= \mathbb{R} ou \mathbb{C})$ vérifiant :

1. pour presque tout x la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ a une limite $f(x)$,
2. il existe une fonction positive intégrable g telle que, pour tout n et presque tout x, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction f est intégrable et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

1.1 Continuité

Proposition 2 (continuité sous le signe intégrale)**.** [ZQ 312, BP 145] Supposons les conditions suivantes vérifiées :

1. Pour tout $t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable,
2. Pour presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in E$
3. il existe $g \in \mathcal{L}^1$ une fonction positive indépendante de t telle que $|f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in E$, presque partout en x

Alors la fonction F est bien définie sur E et est continue au point t_0.

Corollaire 3 (ZQ 312)**.** Supposons que :

1. pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
2. pour presque tout $x \in E$ la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E,
3. pour tout compact K de E il existe $g \in \mathcal{L}^1$ positive indépendante de t telle que : $|f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$, presque partout en x.

Alors le fonction F est bien définie et continue sur E.

Exemple 4. [no ref par <3] La fonction $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} dx$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

1.2 Dérivabilité

Théorème 5 (ZQ 316)**.** On suppose ici que E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose en outre que :

1. Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$
2. La fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I pour presque tout $x \in I$. (On notera $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ sa dérivée).
3. Pour tout compact K de I il existe une fonction $g \in L^1$ positive indépendante de t, telle que pour presque tout $x \in I$ $|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$.

Alors :

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ est dans $L^1(X)$
2. la fonction F est dérivable sur I et $\forall t \in I, F'(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t,x) d\mu(x)$.

Corollaire 6 (no ref <3)**.** Le théorème précédent peut-être modifié pour obtenir un critère $\mathcal{C}^k$:

1. Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$

2. La fonction $t \mapsto f(t,x)$ est de classe C^k sur I pour presque tout $x \in I$.
3. $x \mapsto \frac{\partial^k}{\partial t^k} f(t,x)$ est continue pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Pour tout compact K de I il existe une fonction $g \in L^1$ positive indépendante de t, telle que pour presque tout $x \in I$ $|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$.

Alors :

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^k}{\partial t^k} f(t,x)$ est dans $L^1(X)$
2. la fonction F est de classe C^k sur I et $\forall t \in I, F'(t) = \int_X \frac{\partial^k}{\partial t^k} f(t,x) d\mu(x)$.

Exemple 7 (no ref par <3)**.** On peut continuer de travailler sur les exemples 4 en montrant que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$. Cette exemple permet ensuite de calculer l'intégrale de Gauss (grâce au théorème de convergence dominée) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exemple 8 (DEV1)**.** Calcule de l'intégrale $\int_0^{+\infty} sinc(t)dt$. (intégrale de Dirichlet)

Corollaire 9 (no ref)**.** On suppose ici que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose en outre que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de terme général $(f(x,n))_n$ est convergente
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto f(x,n)$ est dérivable sur I.
3. Pour tout sous intervalle $J \subset I$ il existe une fonction g sommable, positive indépendante de t, telle que $|\frac{\partial}{\partial x} f(x,n)| \leq g(n)$, $\forall x \in J$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors :

1. Pour tout $x \in J$, la série de terme général $(\frac{\partial}{\partial x} f(x,n))_n$ est convergente,
2. Pour tout $x \in J$, la série de terme général $(f(x,n))_n$ est dérivable sur J, de dérivée $\sum \frac{\partial}{\partial x} f(x,n)$.

1.3 Théorème d'holomorphie

Théorème 10 (TAU 91)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : U \times I \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant les hypothèses :

1. $\forall z \in U$, $x \to f(z,x)$ est intégrable.
2. $\forall x \in I$, $z \to f(z,x)$ est holomorphe.
3. Pour totut compact K de U, il existe $g_K : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que :
$$\forall x \in I, \forall z \in K, |f(z,x)| \leq g_K(x)$$

Alors $F : z \mapsto \int_I f(z,x)dx$ est holomorphe sur U et pour tout $z \in U$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)dx$$

Attention changer pour dans $\mathbb{R}$ pour être plus à l'aise mais savoir que ok pour $I -> (X,\mu)$ espace mesuré.

Dire qu'on l'utilisera notamment dans le dev 2, mais ne pas le mettre ici car va mieux dans partie après

1.4 Méthode de Laplace

[ROU 349] Soient $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi} f$ soit Lebesgue-intégrale sur $[a,b[$ pour un certain réel t_0. On suppose f continue en a et $f(a) \neq 0$.

Théorème 11 (ROU 349)**.** Si $\varphi' > 0$, alors $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)dx \sim_{t\to\infty} \frac{1}{\varphi'(a)} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t}$.

Exemple 12 (FAR 103)**.** Étudions $F(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt$. Par le changement de variable $t = xu$ on obtient $F(x) = x\int_1^\infty e^{-x^2u^2} du$. En posant $G(\lambda) = \int_1^\infty e^{-\lambda u^2} du$, on a $G(\lambda) \sim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda}$. On en déduit alors $F(x) \sim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} e^{-x^2}$.

[ROU 349] Autre théorème : Si $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, alors $F(t) \sim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$ demande lemme Morse donc ne pa mettre. Mais donne application formule Stirling.

2 Convolution

Pour fonctions "raisonnablement intégrables", joue rôle important dans les problèmes d'approximation régularisante

Soient $f, g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) deux fonctions boréliennes. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 13 (BP 297)**.** Supposons f, g positives. La convolée de f et g, noté $f * g$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\lambda_d(dy)$$

Proposition et définition 14 (BP 297+299)**.** La fonction $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est borélienne de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$. De plus

$$y \mapsto f(x-y)g(y) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d) \iff (|f| * |g|)(x) < +\infty$$

Si tel est le cas, on définit la convolée de f et g en x par $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\lambda_d(dy)$

Théorème 15 (BP 301)**.** Supposons $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. On a :

1. $(f*g)(x)$ est définie en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ si besoin : continue, bornée par norm p f norme q g ; bilinéarité.
2. Si de plus, $1 < p, q < \infty$, $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} (f * g)(x) = 0$.

3 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Dans cette partie, considérons $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

3.1 Définition et résultats élémentaires

Définition 16 (FAR 130)**.** La transformée de Fourier de f est la fonction notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x)dx$.

Notation 17 (No ref, ELA F 111)**.** On note $\mathcal{F}(f)$ (ou $\widehat{f}$) l'application $\mathcal{F}(f) : t \mapsto \hat{f}(-t)$

Exemple 18 (No ref, prémice ex FAR 130)**.** La tranformée de Fourier de la fonction $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ est $\widehat{f}(t) = 2sinc(t)$.

Proposition 19 (FAR 106)**.** [Riemann-Lebesgue] Si f est intégrable sur $]\alpha, \beta[$, alors la fonction $F(\lambda) := \int_\alpha^\beta e^{i\lambda x} f(x)dx$ converge vers 0 lorsque $|\lambda|$ tend vers l'infini.

Bien def et continue par notre thm de continuité

Théorème et définition 20 (ELA.F 110)**.** $\hat{f}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$ (i.e. $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$).
La transformation de Fourier sur L^1 est l'application de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$

Sa norme est égale à 1, prendre fonction positive pour avoir égalité.

Proposition 21 (ELA.F 111)**.** $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ est une application linéaire et continue

Insister sur le 1er qui vient du thm dér sous int

Proposition 22 (FAR 132)**.** [mettre F à la place de chapeau pour bien voir]

1. Si $xf \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)$ est dérivable et $\mathcal{F}(f)' = \mathcal{F}(-ixf)$.
2. Si $f \in C^1$ et si $f' \in L^1$, alors $\mathcal{F}(f') = it\mathcal{F}(f)$

Savoir on peut étendre à dériver k fois

3.2 Formule d'inversion

Théorème 23 (ELA F 116, FAR 133)**.** [admis] Si $\hat{f}$ est intégrable, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \hat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{f}}(x)$

En particulier égales dans L^1. Avoir en tête que très rextrictif et écarte les fonctions les plus utiles en maths/physiques. Ce theorem entraine que $f \in L^\infty$

Application 24 (HOU 515-518)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la $n-$ième fonction de Hermite par $h_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$.
Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

1. $< h_n, h_m >= 0$ si $m \neq n$
2. $< h_n, h_m >= 2^n n! \sqrt{\pi}$ si $m = n$

De plus : DEV2
La famille $(h_n)_n$ est une famille orthogonale et la famille $(\frac{h_n}{\|h_n\|})_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Faire lien avec intégrale de Dirichlet !!

Lemme 25 (FAR 134)**.** Soit f une fonction intégrable sur $[0, T]$ admettant une limite à droite en 0 notée $f(0+)$. Supposons qu'il existe K et x_0 tels que, pour tout $0 < x < x_0$, $|f(x) - f(0+)| \leq Kx$. Alors $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \int_0^T f(x) \frac{sin(\lambda x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0+)$.

Théorème 26 (FAR 134)**.** Supposons que f admette en un point x une limite à gauche $f(x-)$ et une limite à droite $f(x+)$. Supposons de plus qu'il existe $\eta > 0$ et $M > 0$ tels que pour $0 < h < \eta$, $|f(x+h) - f(x+)| \leq Mh$ et $|f(x-h) - f(x-)| \leq Mh$. Alors $\lim\limits_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} e^{ixt} \hat{f}(t) dt = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$.

4 Fonction caractéristique

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle.

Définition 27 (OUV 191)**.** On appelle fonction caractéristique de X la transformée de Fourier de sa loi $\mathbb{P}_X$. Elle est noté ϕ_X.

Proposition 28 (EXE p104)**.** Soit deux variables aléatoires réelles X et Y. On a :

$$P_X = P_Y \iff \phi_X = \phi_Y$$

La fonction caractéristique caractérise donc la loi.

Lien avec l'injectivité de fourier

Proposition 29 (OUV p202)**.** Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)$

vient de indépendance => loi de la somme est le produit de convolution + résultat transfo fourier sur convolutions

Application 30. [DEV 2] Calcul de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy.

A VOIR

Théorème 31 (Premier théorème de Lévy, admis)**.** [GAR p306] (Xn) converge en loi vers X ssi φ_{X_n} converge vers φ_X.

Théorème 32 (GAR 307)**.** [Pas même énoncé car preuve par <3] Soit (X_n) indépendantes et identiquements distribuées admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\sqrt{n}(\frac{X1 + \ldots + Xn}{n} - \mathbb{E}(X_1)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbb{V}(X_1))$$