Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

1 Méthodes élémentaires

1.1 Calcul de primitive

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 1 (TL1 758)**.** [de Cauchy, A voir si je laisse] Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue admet une primitive. Plus précisément, la primitive de f qui s'annule en un point $a \in I$ est l'application $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Théorème 2 (TL1 759)**.** [fondamental de l'analyse] Soit f une fonction continûment dérivable sur I. Alors, pour tout α, β dans I, on a :

$$\int_\alpha^\beta f'(x)dx = f(\beta) - f(\alpha)$$

Notation 3 (TL1 759)**.** Le membre de droite est souvent noté $[f(x)]_\alpha^\beta$.

Corollaire 4 (TL1 759)**.** Soit f continue sur I. Si F est une primitive de f, alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Exemple 5 (TL1 759)**.** $\int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi)+\cos(0) = 2$

Méthode 6 (TL1 760, GOU 137)**.** Il est donc utile d'avoir en tête les primitives des fonctions usuelles, on donne les plus élémentaires en annexe 1.

Exemple 7 (No ref)**.** $\int_0^{+\infty} ue^{-u^2/2}du = [-e^{-u^2/2}]_0^{+\infty} = 1$ car $\lim_{M\to\infty} -e^{-M^2/2} = 0$

Motivation partie suivante : parfois il difficile voir impossible de trouver une primitive (prendre un exmple : $\arctan(x)$, $\ln(x)$). Il va donc nous falloir d'autres méthodes pour nous y ramener.

1.2 Intégration par partie

Théorème 8 (TL1 761)**.** Soient f, g deux fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$. Alors $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b + \int_a^b f'(x)g(x)dx$. On abrégera le nom de cette méthode par "IPP".

Exemple 9 (TL1 763)**.** Cherchons une primitive de la fonction ln sur son intervalle de définissions $\mathbb{R}_+^*$. Le premier résultat du cours nous dit que $\int_1^t \ln(x)dx$ est une telle primitive. Remarquons que $\ln(x)$ est le produit des fonctions $f(x) := \ln x$ et $g'(x)$ où $g(x) := x$. f et g sont toutes deux continûment dérivables, on peut donc utiliser une IPP qui nous donne :

$$\int_1^t \ln(x)dx = [xln(x)]_1^t - \int_1^t x\frac{1}{x}dx = t\ln(t) - (t-1) = t\ln(t) - t + 1$$

Les primitives de ln sont donc de la forme $t \mapsto t\ln(t) - t + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 10. De même, cette méthode nous permet de calculer $\int_0^t \arctan(x)dx$: $\int_0^t \arctan(x)dx = [x\arctan(x)]_1^t - \int_1^t \frac{x}{1+x^2}dx = [x\arctan(x)]_1^t - [\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_1^t$. On en déduit que les primitives de $\arctan(t)$ sont de la forme $t \mapsto t\arctan(t) - \ln(\sqrt{1+x^2}) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

1.3 Changement de variable

Théorème 11 (TL1 764)**.** [formule de changement de variable] Soit φ une fonction continûment dérivable sur un intervalle I, à valeur dans un intervalle J. Si $a, b \in I$ et si f est continue sur J, alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b (f \circ \varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Exemple 12 (TL1 764)**.** $\int_0^{4\pi} \cos(t)e^{\sin(t)}dt$ peut être calculé à l'aide du changement de variable $\varphi = \sin$. Dans ce cas, $\varphi' = \cos$ et on a donc :

$$\int_0^{4\pi} \cos(t)e^{\sin(t)}dt = \int_{sin(0)}^{sin(4\pi)} e^t dt = 0$$

Méthode 13 (No ref)**.** Le changement de variable $\varphi(x) = b + a - x$ (où a et b sont les bornes de l'intervalles) donne l'égalité qu'on appelle "propriété du roi" :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a + b - x)dx$$

Exemple 14 (No ref, voir)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Intéressons nous à $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(x)}{\cos^n(x)+\sin^n(x)}dx$. Par La propriété du roi et les formule trigonométrique on trouve $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(x)}{\cos^n(x)+\sin^n(x)}dx$. Puis on sommant ces deux égalités :

$$2I = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $I = \frac{\pi}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avoir en tête application : intégrales de Wallis

2 Méthode d'inversion

Exemple 15 (No ref)**.** L'exemple fil rouge de cette partie nous amènera à la formule de Stirling. Pour ça on considère une suite de v.a.i.i.d $(X_n)_n$ suivant une loi de Poisson de paramètre 1. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ et $Z_n := \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Le théorème limite central nous donne déjà $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z$, où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 16 (théorème de convergence dominée)**.** [FAR 17, BP 140] Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions à valeur dans $\mathbb{K}(= \mathbb{R}ou\mathbb{C})$ vérifiant :

1. pour presque tout x la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ a une limite $f(x)$,
2. il existe une fonction positive intégrable g telle que, pour tout n et presque tout x, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction f est intégrable et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

Exemple 17. Reprenons notre example fil rouge. La convergence en loi de Z_n vers Z nous donne que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(Z_n > t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Z > t)$. On peut montrer que $\mathbb{P}(Z_n > t) \leq \frac{\mathbb{E}(Z_n^2}{t^2} = \frac{1}{t^2}$, donc $\mathbb{P}(Z_n > t) \leq \mathbb{1}_{]0,1[}(t) + \frac{1}{t^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$ qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée nous donne alors $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)dt$. Reste alors à calculer ces deux intégrales.

2.2 Les théorèmes de Fubini

Théorème 18 (Fubini-Tonelli)**.** [BP 239,FAR 61] Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathbb{B}, \nu)$ sont deux espaces mesurés $\sigma-$finis. Soit f une fonction mesurable sur $X \times Y$ à valeur dans $[0, +\infty]$.

1. Les fonctions partout définies $x \mapsto \int_Y f(x, y)d\nu(x)$ et $\int_X f(x, y)d\mu(x)$ sont mesurables.
2. $\int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X (\int_Y f(x, y)d\nu(y))d\mu(x)$
$= \int_Y (\int_X f(x, y)d\mu(x))d\nu(y)$.

Exemple 19 (No ref)**.** Reprenons notre exemple : $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_t^{+\infty} e^{-u^2/2}dt)du$. Or $e^{-u^2/2}$ est positive pour tout $u \in [t, +\infty[$, on peut donc appliqué le théorème de Fubini Tonneli et on obtient : $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty}(\int_0^u e^{-u^2/2}dt)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ par l'exemple 7

Théorème 20 (Fubini-Lebesgue)**.** [BP 241] Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathbb{B}, \nu)$ sont deux espaces mesurés $\sigma-$finis. Soit $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ une fonction $\mu \otimes \nu$ intégrable. Alors :

1. $x \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(y)$ est $\mu-$p.p. définie et est μ-intégrable sur X
2. $y \mapsto \int_Y f(x,y)d\mu(x)$ est $\nu-$p.p. définie et est ν-intégrable sur X.
3. $\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu \otimes \nu(x,y) = \int_X(\int_Y f(x,y)d\nu(y))d\mu(x)$
 $= \int_Y(\int_X f(x,y)d\mu(x))d\nu(y)$.

Remarque 21. L'interversion somme intégrale est enfaite un cas particulier de ces théorèmes. En effet, ils sont vu avec $(Y, \mathbb{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage.

Exemple 22. Par example, dans notre example :
$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)dt = \int_0^{+\infty}(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{1}_{k>\sqrt{n}t+n})dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{1}_{k>\sqrt{n}t+n}dt) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\int_0^{\frac{k-n}{\sqrt{n}}} e^{-n}\frac{n^k}{n!}dt) = \frac{e^{-n}n^{n+1}}{n!\sqrt{n}}$

3 Intégrale à paramètre

Dans ce qui suit, $(X, \mathcal{T}, \mu)$ désignera un espace mesuré et (E, d) un espace métrique. On considère une fonction $f : E \times X \to \mathbb{C}$. Lorsqu'elle sera bien définie, on désignera par F la fonction $t \in E \mapsto \int_X f(t,x)d\mu(x)$.

3.1 Continuité

Proposition 23 (ZQ 312)**.** Supposons que :

1. pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
2. pour presque tout $x \in E$ la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E,
3. pour tout compact K de E il existe $g \in \mathcal{L}^1$ positive indépendante de t telle que : $|f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$, presque partout en x.

Alors le focntion F est bien définie et continue sur E.

Exemple 24. [no ref par <3] La fonction $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}dx$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Application 25. Si $f \in \mathcal{L}^1$, l'application transformée de Fourier de f est bien définie en continue sur $\mathbb{R}$.

3.2 Dérivabilité

Théorème 26 (ZQ 316)**.** On suppose ici que E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose en outre que :

1. Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$
2. La fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I pour presque tout $x \in I$. (On notera $\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)$ sa dérivée).
3. Pour tout compact K de I il existe une fonction $g \in L^1$ positive indépendante de t, telle que pour presque tout $x \in I$ $|\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$.

Alors :

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t}f(t,x)$ est dans $L^1(X)$
2. la fonction F est dérivable sur I et $\forall t \in I, F'(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t}f(t,x)d\mu(x)$.

Corollaire 27 (no ref <3, GOU 167 un peu)**.** Le théorème précédent peut-être modifié pour obtenir un critère $\mathcal{C}^k$:

1. Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$
2. La fonction $t \mapsto f(t,x)$ est de classe C^k sur I pour presque tout $x \in I$.
3. $x \mapsto \frac{\partial^k}{\partial t^k}f(t,x)$ est continue pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Pour tout compact K de I il existe une fonction $g \in L^1$ positive indépendante de t, telle que pour presque tout $x \in I$ $|\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$.

Alors :

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^k}{\partial t^k}f(t,x)$ est dans $L^1(X)$
2. la fonction F est de classe C^k sur I et $\forall t \in I, F'(t) = \int_X \frac{\partial^k}{\partial t^k}f(t,x)d\mu(x)$.

Exemple 28 (no ref par <3, Revoir posé demo)**.** On peut continuer de travailler sur l'exemple 24 en montrant que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$. Par une utilisation du théorème de convergence dominée, on a $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}dx = 0$, ce qui permet ensuite de calculer l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Application 29 (BP 151)**.** Si $f \in \mathcal{L}^1$ et $x \mapsto xf(x)\mathcal{L}^1$ alors la transformée de Fourier de $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\hat{f}'(u) = i\widehat{xf(x)}(u)$

Application 30 (KUR 244 245)**.** [Voir si on peut faire lien oral avec dernière partie] Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1. Alors sa fonction caractéristique φ vérfie : $\varphi'(0) = i\mathbb{E}(X)$

Définition 31 (un peu GOU 164)**.** On appelle transformée de Laplace de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable, l'intégrale $\mathcal{L}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt$.

Méthode 32. L'étude de la tranformée de Laplace d'une fonction nous permet parfois de calculer cette dernière. C'est le cas de l'exemple suivante. Savoir principaux résultat de méthode Laplace sont des équivalents mais pas détailler car peu connaissance + pas coeur du sujet !

Exemple 33 (DEV 1)**.** Calcule de l'intégrale $\int_0^{+\infty} sinc(t)dt$. (intégrale de Dirichlet)

4 Calcul d'intégrale grâce à la théorie de l'analyse complexe

On suppose la théorie d'analyse complexe complexe connue.

Théorème 34 (Théorème des résidus)**.** [TAU 103] On suppose U connexe. Soient $a_1, ..., a_n$ des points deux à deux distincts de U et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a_1, ..., a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f. Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne contient aucun des a_k, on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} ind_\gamma(a_k) Res(f, a_k)$$

Application 35 (DEV 2)**.** Calcul de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy.