Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

[BP] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désignera un espace mesuré quelconque. On adoptera les convention : $0 \times \mu(A) = 0, \forall a \in \mathcal{A}$ et $0 \times f(x) = 0$ pour toute fonction f (y compris $\mu(A) = +\infty$ et $f(x) = \pm\infty$). On considère $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Attention dans FAr, pas même espace

1 Intégrales de Lebesgue

Intégration pour une mesure quelconque et mentionner que int de Lebsesgue pour mesure λ

1.1 Prérequis

Définition 1 (BP 69)**.** Soit $(Y, \mathcal{B})$. On dit que $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Notation 2. On notera $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ l'ensemble des focntions mesurables sur $(X, \mathcal{A})$ et $\mathcal{M}^+_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ celles positives.

Définition 3 (BP 74)**.** La fonction f est dite étagée si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Notation 4 (BP 74)**.** On note $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ désigne l'ensemble des fonctions étagées et $\mathcal{E}^+_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ celles positives.

c'est une $\mathbb{K}-$algèbre stable par max et min

Proposition 5 (BP 74)**.** Les fonctions étagées sont de la forme $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où I est fini, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $(A_i)_{i \in I}$ est une partition d'éléments $\mathcal{A}$ de X.

Définition 6 (BP 74)**.** La forme canonique d'une fonction étagée est l'unique écriture $f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbb{1}_{f=\alpha}$

Même rôle que fonctions escalier chez Riemann

Théorème 7 (BP 75)**.** [Lemme fondamental d'approximation] Si f est mesurable à valeur dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, alors il existe une suite de fonctions étagées $(f_n)_{n \geq 1}$, telle que, pour tout $x \in X$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$. En outre,

1. Si $f \geq 0$, on peut choisir la suite $(f_n)_n$ croissante positive : $0 \leq f_n \leq f_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Si f est bornée, on peut choisir la suite $(f_n)_n$ de façon que f_n converge uniformément vers f.

1.2 Cas des fonctions étagée positive

Dans cette sous-partie, on considère que $f \in \mathcal{E}^+_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$.

Définition 8 (BP 120)**.** L'intégrale de f par rapport à la mesure μ est définie par $\int_X f d\mu := \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Notation 9 (BP 120)**.** On note également cette intégrale $\int_X f(x) d\mu(x)$.

Proposition 10 (BP 120)**.** Pour toute décomposition de f par $\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, on a $\int_X f d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i)$

Exemple 11 (BP 120)**.** Si f est la fonction nulle, par convention $\int_X f d\mu = 0 \times \mu(X) = 0$.

Remarque 12 (BP 120)**.** $\int_X f d\mu < +\infty \iff \mu(\{f \neq 0\}) < \infty$

Proposition 13 (BP 121)**.** Soit $g \in \mathcal{E}^+_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$. On a les propriétés suivantes :

1. aditivité : $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$
2. croissance : $f \leq g \implies \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$
3. positive homogénéité : $\forall \lambda \geq 0, \int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$

Résultat suivant très important pour construction de l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 14 (BP 122)**.** Soient $A, B \in \mathcal{A}$. Alors

1. $\mathbb{1}_A f$ est une fontion étagée positive et $\int_A f d\mu := \int_X (\mathbb{1}_A f) dm$ où m est la mesure de comptage.
2. Si $A \cap B = \emptyset$, $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$
3. Soit $(E_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, croissante pour l'inclusion et telle que $\bigcup\limits_{n \geq 1} E_n$. Alors $\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f d\mu$

1.3 Cas des fonctions mesurables positives

Dans cette sous-partie on considère que $f \in \mathcal{M}^+_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$.

Définition 15 (BP 123)**.** On pose

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu | \varphi \leq f, \varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^+}(\mathcal{A}) \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

On dit que f est $\mu-$intégrale si $\int_X f d\mu$.

Proposition 16 (BP 123)**.** Soit $g \in \mathcal{M}^+_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$. Si $f \leq g$, alors $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

Théorème 17 (BP 124)**.** [Beppo Levi ou convergence monotone] Soit $(f_n)_{n \leq 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}^+_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ (au sens $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$). Alors $f := f_n \in \mathcal{M}^+_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ et $\int_X f d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu$

Coïncide bien avec intégrale déf précédemment pour fonction étagées.

Proposition 18 (BP 125)**.** [ne pas remettre croissance] Soit $g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

1. additivité : $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$
2. positive homogénéité : $\forall \lambda \leq 0, \int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$

Proposition 19 (BP 125)**.** $\int_X f d\mu = 0 \iff \mu(\{f \neq 0\}) = 0$

Proposition 20. Soit $g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Si $f = g$ $\mu-$p.p. alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$

Proposition 21 (FAR 16)**.**

1. $\forall \alpha > 0$, $\mu(\{x | f(x) \leq \alpha\}) \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu$
2. Si $\int_X f d\mu = 0$ alors f est nulle presque partout.
3. Si $\int_X f d\mu < \infty$, alors f est finie presque partout.

1.4 Cas des fonctions mesurables

Dans cette sous-partie on suppose f mesurable

Définition 22. On dit que f est $\mu-$intégrable si $|f|$ est $\mu-$intégrable.

Notation 23. On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(X)$ l'ensemble des fonctions $\mu-$intégrables définies sur X à valeur dans $\mathbb{K}$.

Définition 24 (BP, à voir)**.**

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\int_X d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\int_X d\mu := \int_X Re(f) d\mu - \int_X Im(f) d\mu$

Proposition 25 (BP 129)**.** Soit $g \in \mathcal{L}^1(X)$.

1. $f \geq 0 \implies \int_X f d\mu \geq 0$
2. $f \leq g \implies \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

Proposition 26 (BP 130)**.** $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$

Avoir en tête cas égalité pour R et C

Proposition 27 (FAR 16)**.** Si $\int_X f d\mu < \infty$, alors f est finie presque partout.

1.5 Lien avec intégrale de Riemann

On se place désormais dans le cadre où $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue.

Proposition 28 (BP 131)**.** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est borélienne et Riemann intégrable, alors $f \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$ et $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda$

Contre-exemple 29 (HAUCH 208)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Cette fonction n'est pas Riemann intégrable (en prenant deux fonctions escalier φ, ψ tels que $\varphi \leq f \leq \psi$, on arrive au fait que la différence de ces intégrales est strictement positive). Cependant elle est Lebesgue intégrable car $\lambda(\{f \neq 0\}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

2 Grands résultats

2.1 Convergence d'intégrale

Lemme 30 (lemme de Fatou)**.** Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables d'un ensemble X dans $[0, +\infty]$. Alors : $0 \leq \int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$.

Théorème 31 (théorème de convergence dominée)**.** [FAR 17, BP 140] Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions à valeur dans $\mathbb{K}(= \mathbb{R} ou \mathbb{C})$ vérifiant :

1. pour presque tout x la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ a une limite $f(x)$,
2. il existe une fonction positive intégrable g telle que, pour tout n et presque tout x, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction f est intégrable et on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

2.2 Intégrale à paramètre

Dans ce qui suit, $(X, \mathcal{T}, \mu)$ désignera un espace mesuré et (E, d) un espace métrique. On considère une fonction $f : E \times X \to \mathbb{C}$. Lorsqu'elle sera bien définie, on désignera par F la fonction $t \in E \mapsto \int_X f(t,x) d\mu(x)$.

Proposition 32 (continuité sous le signe intégrale)**.** [ZQ 312, BP 145] Supposons les conditions suivantes vérifiées :

1. Pour tout $t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable,
2. Pour presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in E$
3. il existe $g \in \mathcal{L}^1$ une fonction positive indépendante de t telle que $|f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in E$, presque partout en x

Alors la fonction F est bien définie sur E et est continue au point t_0.

Savoir que théorème ok si juste compact

Application 33. Si $f \in \mathcal{L}^1$, l'application transformée de Fourier de f est bien définie en continue sur $\mathbb{R}$. (cf IV).

Théorème 34 (ZQ 316)**.** On suppose ici que E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose en outre que :

1. Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$
2. La fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I pour presque tout $x \in I$. (On notera $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ sa dérivée).
3. Pour tout compact K de I il existe une fonction $g \in L^1$ positive indépendante de t, telle que pour presque tout $x \in I$ $|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$.

Alors :

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ est dans $L^1(X)$
2. la fonction F est dérivable sur I et $\forall t \in I, F'(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t,x) d\mu(x)$.

Application 35 (soit lui soit celui en dessous soit les deux)**.** [KUR 244 245] Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1. Alors sa fonction caractéristique φ vérfie : $\varphi'(0) = i\mathbb{E}(X)$

Exemple 36 (Est-ce que ça passe en dév ici ?)**.** Calcule de l'intégrale $\int_0^{+\infty} sinc(t) dt$. (intégrale de Dirichlet)

2.3 Théorèmes de Fubini

Théorème 37 (Fubini-Tonelli)**.** [BP 239,FAR 61] Soit f une fonction mesurable sur $X \times Y$ à valeur dans $[0, +\infty]$.

1. Les fonctions partout définies $x \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(x)$ et $\int_X f(x,y) d\mu(x)$ sont mesurables.

2. $\int_{X\times Y} f d\mu\otimes\nu = \int_X(\int_Y f(x,y)d\nu(y))d\mu(x)$
   $= \int_Y(\int_X f(x,y)d\mu(x))d\nu(y)$.

Théorème 38 (Fubini-Lebesgue)**.** [BP 241] Soit $f : X\times Y \to \mathbb{C}$ une fonction $\mu\otimes\nu$ intégrable. Alors :

1. $x \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(y)$ est $\mu-$p.p. définie et est μ-intégrable sur X
2. $y \mapsto \int_Y f(x,y)d\mu(x)$ est $\nu-$p.p. définie et est ν-intégrable sur X.
3. $\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\otimes\nu(x,y) = \int_X(\int_Y f(x,y)d\nu(y))d\mu(x)$
   $= \int_Y(\int_X f(x,y)d\mu(x))d\nu(y)$.

3 Espace L^p

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré.

Définition 39 (BP 171, 163, FAR 41)**.** Pour $f : \Omega\to\mathbb{K}$ mesurable, on pose :

1. pour tout $1\le p<\infty$, $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$
2. $\|f\|_\infty := \inf\{c>0 | \mu(\{x\in\Omega | f(x)>c\}) = 0\}$

Notation 40 (BP 171, 163, FAR 41)**.** On note $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu) := \{f : \Omega\to\mathbb{K}$ mesurable $| \|f\|_p < +\infty\}$

Proposition 41 (BP 171, 163, FAR 41)**.** $f\sim g \iff \mu(\{x\in\Omega | f(x)\neq g(x)\}) = 0$ est une relation d'équivalence.

Définition 42 (BP 171, 163, FAR 41)**.** On définit les esapces L^p par $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu) := \mathcal{L}(\Omega,\mathcal{A},\mu)/\sim$.

Proposition 43 (inégalité de Hölder)**.** [BP 165, FAR 42] Soit $(p,q)\in[1,+\infty]^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 0$.

$$\forall f\in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu), \forall g\in L^q(\Omega,\mathcal{A},\mu), \|fg\| \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

Proposition 44 (FAR 42)**.** [Inégalité de Minkovski] Soit $p\in[1,+\infty]^2$ et $p,q\in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Alors $f+g\in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

Corollaire 45 (FAR 43)**.** $\|.\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $\|f\| = 0 \iff f = 0$ p.s.

Théorème 46 (Riesz Fisher)**.** [BP 172, dev2] Pour tout $1\le p\le\infty$, $(L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.

Application 47 (BP 156)**.** Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathbb{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Soit de plus X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ intégrable. Alors il existe une unique (p.s.) variable aléatoire appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ telle que :

1. $w\mapsto \mathbb{E}(X|\mathcal{B})(w)$ est $\mathcal{B}-$mesurable
2. $\forall B\in\mathcal{B}, \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B})d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}$

Savoir L^2 en part Hilbert car on peut def un p.s. dessus

Proposition 48 (No ref)**.** Si $\mu(X)$ est finie et $1\le p<q\le+\infty$, alors $L^q\subset L^q$. réciproque fausse, essayer trouver example à avoir en tête

4 Applications

4.1 Convolution

Pour fonctions "raisonnablement intégrables", joue rôle important dans les problèmes d'approximation régularisante

Soient $f,g : (\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))\to\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) deux fonctions boréliennes. Soit $d\in\mathbb{N}^*$, et $p,q\in[1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Définition 49 (BP 297)**.** Supposons f,g positives. La convolée de f et g, noté $f*g$ est définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}^d, (f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\lambda_d(dy)$$

Proposition et Définition 50 (BP 297+299)**.** La fonction $(x,y)\mapsto f(x-y)g(y)$ est borélienne de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$. De plus

$$y\mapsto f(x-y)g(y)\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d) \iff (|f|*|g|)(x) < +\infty$$

Si tel est le cas, on définit la convolée de f et g en x par $(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\lambda_d(dy)$

Théorème 51. Supposons $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. On a :

1. $(f*g)(x)$ est définie en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ si besoin : continue, bornée par norm p f norme q g ; bilinéarité.
2. Si de plus, $1 < p, q < \infty$, $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} (f*g)(x) = 0$.

4.2 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 52 (FAR 130)**.** La transformée de Fourier de f est la fonction notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x)dx$.

Exemple 53 (No ref, prémice ex FAR 130)**.** La tranformée de Fourier de la fonction $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ est $\widehat{f}(t) = 2sinc(t)$.

Proposition 54 (FAR 106)**.** [Riemann-Lebesgue] Si f est intégrable sur $]-\alpha, \beta[$, alors la fonction $F(\lambda) := \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda x} f(x)dx$ converge vers 0 lorsque $|\lambda|$ tend vers l'infini.

Théorème et définition 55 (ELA.F 110+111)**.** $\hat{f}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$ (i.e. $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$).
La transformation de Fourier sur L^1 est l'application de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$. C'est une application linéaire et continue.

Théorème 56 (ELA F 116, FAR 133)**.** Si $\hat{f}$ est intégrable, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \hat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{f}}(t)$

Application 57 (HOU 515-518)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la $n-$ième fonction de Hermite par $h_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$.
Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

1. $< h_n, h_m >= 0$ si $m \neq n$
2. $< h_n, h_m >= 2^n n! \sqrt{\pi}$ si $m = n$

De plus : DEV2
La famille $(h_n)_n$ est une famille orthogonale et la famille $(\frac{h_n}{\|h_n\|})_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Avoir en tête convolution, autre application, mais là pas la place :/