Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1 Fonctions monotones

1.1 Généralités

Définition 1 (TL1 628)**.** On dit qu'une fonction f est :

1. croissante (resp. strictement croissante) sur I si : $\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)($ resp. $f(x) < f(y))$
2. décroissante (resp. strictement décroissante) sur I si :$\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)($ resp. $f(x) > f(y))$
3. monotone (resp. strictement) si elle est croissante ou décroissante (resp. stricement croissante ou strictement décroissante).

Exemple 2 (No ref)**.** La fonction identité est strictement croissante.

Proposition 3 (TL2 629)**.** Toute fonction monotone sur I admet une limite, finie ou infinie, aux bornes de I.

Proposition 4 (TL2 647, théorème de la limite monotone)**.** Une fonction monotone sur I admet, en tout point a intérieur à I, une limite finie à droite, noté $f(a^+)$, et une limite finie à gauche, notée $f(a^-)$, avec $f(a)$ compris entre $f(a^-)$ et $f(a^+)$. Dans le cas où f est croissante, on a :

$$f(a^-) = \sup_{x<a} f(x) \leq f(a) \leq \inf_{a<x} f(x) = f(a^+)$$

De plus, pour tous $c, d \in I$, $c < d$, on a $f(c^+) \leq f(d^-)$.

Exemple 5 (No ref,)**.** Considérons $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définit par $f(x) = x$ sur $[0,1]$ et $f(x) = x+1$ sur $]1,2]$, (cf annexe 1). f est strictement croissante. De plus $f(1^-) = 1 = f(1) \leq 2 = f(1^+)$.

Proposition 6. Si f est monotone sur un intervalle I telle que $f(I)$ est également un intervalle, alors f est continue.

Théorème 7 (TL1 637)**.** Une application continue strictement monotone f d'intervalle I dans $\mathbb{R}$ induit une bijection sur l'intervalle $f(I)$ et sa réciproque est continue sur J.

Contre-exemple 8 (No ref)**.** Sans l'hypothèse de continuité, $f(I)$ n'est pas forcément un intervalle. On peut le voir avec la fonction de l'exemple 5. On a f strictement croissante mais $f([0,2]) = [0,1] \cup]2,3]$. (cf annexe 1).

Exemple 9 (No ref)**.** Notons g la fonction carrée. g est strictement croissante sur $[1,2]$ donc g est bijective de $[1,2]$ dans $g([1,2]) = [1,4]$. Sa fonction réciproque est la fonction racine carrée qu'on notera h. Notons que sur $\mathbb{R}$ ce résultat n'est plus vrai étant donné que $g(-2) = 4$ mais $h(2) = 2 \neq -2$. Ceci viens du fait que g n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ (cf annexe 2).

Proposition 10 (TL1 637)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue injective. Alors f est strictement monotone et réalise un homéomorphisme de I sur $J := f(I)$.

1.2 Stabilité de la monotonie

Proposition 11. somme prod fonction croissante est croissante (resp avec décroissante)

Proposition 12. f croissante strictement postivive => $1/f$ décroissante.

Proposition 13. f ,g croissante (rdécroissante) => $g \circ f$ croissante.

Méthode 14. Ces propriétés peuvent permettre de déterminer la monotonie d'une fonction à partir des fonctions de références.

Exemple 15. METTRE EX!!

1.3 Monotonie et dérivées

Prérequis : Rolles, TAF

Supposons f continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$

Proposition 16 (TL1 649 / 650, attention dans le livre avant dit qu'on ne peut pas déduire ça comme ça, cf la démo)**.** Si f est dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I, alors :

1. f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$
2. f est décroissante sur I si et seulement si, $f' \leq 0$ sur $\mathring{I}$.
3. Si $f'(x) > 0$ (resp. $f' < 0$) pour tout $x \in \mathring{I}$ alors f est strictement croissante (resp. stritement décroissante) sur I.

Contre-exemple 17 (TL1 647)**.** La réciproque de 3) est fausse, on peut le voir avoir $f : x \mapsto x^3$ puisque $f'(0) = 0$, cependant cette fonction est strictement croissante.

Méthode 18 (No ref)**.** Le théorème nous permet donc d'avoir une méthode pour déterminer les variations d'une fonction. On se ramène alors à étudier le signe de sa dérivée. On peut placer le tout dans un tableau, appelée tableau de variation, dont une ligne est consacrée au signe de la dérivée et une deuxième est consacré aux variations de la fonction.

Exemple 19 (No ref)**.** Etudions les variations de la fonction $h(x) = x^3 - 3x$. Sa dérivée est $3x^2 - 3$. Cette dérivée est positive sur les intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, \infty[$. La restriction de f à l'un de ces intervalles est donc positive. De même, h' est négative sur $[-1, 1]$ donc la fonction est décroissante sur cet intervalle. Le tableau de variation de cette fonction est donnée en annexe 3.

2 Fonctions convexes

Speech : UL'étude de la monotonie d'une fonction va notamment nous permettre d'avoir des renseignements sur celle-ci et notamment sur le critère de convexité de cette dernière.

2.1 Convexité sur $\mathbb{R}^n$

Soit E un espace vectoriel réel et C une partie convexe non vide de E. On considère désormais $f : C \to \mathbb{R}$.

Définition 20 (TL2 529)**.** La fonction f est dite convexe si, pour tous $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a : $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Si cette inégalité est stricte dès que $x \neq y$ et $\lambda \neq 0, 1$, on dit que f est strictement convexe.

Définition 21 (TL2 529, def du dessous)**.** On dit que f est concave (resp. strictement concave) si $-f$ est convexe (resp. strictement convexe).

Exemple 22 (TL2 529)**.** Une norme est une fonction convexe grâce aux propriétés d'inégalités triangulaire et d'homogénéité.

Définition 23 (TL2 529)**.** L'épigraphe d'une fonction f est l'ensemble $\Gamma := \{(x, t) \in C \times \mathbb{R} | t \geq f(x)\}$.

Proposition 24 (TL2 529)**.** f est convexe si et seulement si l'épigraphe de f est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$.

Proposition 25 (TL2 530)**.** Soient $x_1, ..., x_n \in C$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0, 1]$ des réels de somme 1. Si f est convexe, on a l'inégalité : $f(\lambda_1 x_1 + .. + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n)$.

En particulier, $f(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + ... + f(x_n))$

Proposition 26 (ROU 120)**.** [DEV 1] Soit U un ouvert connexe d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé. Soit $f : U \to \mathbb{R}$.

1. Si f est différentiable sur U, on a : f convexe si et seulement si $f(y) - f(x) \geq Df(x)(y - x)$ pour tous $x, y \in U$.

2. Si $E=\mathbb{R}$ et si f est dérivable sur U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on a : f convexe si et seulement si sa dérivée est une fonction croissante sur U.

Interprétation géométrique 27 (ROU 120, TL2 259)**.** Si $E=\mathbb{R}$ cela revient à dire que f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus des tangentes. (cf annexe 6)

2.2 Convexité sur $\mathbb{R}$

Proposition 28 (TL2 529)**.** [différent de 2)1) car ici pas hypothèse différentiable] Une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si sa courbe représentative est au dessous de chaucune de ses cordes.

Exemple 29 (TL2 529)**.** La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ et la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf annexe 6).

Proposition 30 (TL1 661, TL2 529, ssi (juste 1 inég suffit))**.** Une fonction f est convexe si et seulement si pour tous $x<y<z$ $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$. (cf annexe 5)

Corollaire 31 (TL1 667, TL2 531)**.** [juste 2è point, premier déjà en haut] Supposons f deux fois dérivable. f est convexe si et seulement si f'' est positif.

Application 32 (ROU 144)**.** [méthode de Newton, DEV 1] Soit $f: [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 telle que $f(c)<0<f(d)$ et $f'(x)>0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente : $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour tout $n \leq 0$. Alors, f a un unique zéro a et on a :

1. $\exists \alpha>0$ tel que $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge vers a de manière quadratique.
2. Si de plus $f''(x)>0$ pour tout $x \in [c,d]$, alors pour tout $x_0 \in]a,d]$, $(x_n)_n$ est strictement décroissante et $x_{n+1}-a \sim_{n\to\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n-a)^2$.

(cf annexe 7).

3 Applications de la convexité

3.1 De la fonction exponentielle à des inégalités remarquables

Dans cette partie, on se donne un entier $n \geq 1$.

Proposition 33 (TL2, ROU 396 cas égalité)**.** Soient $x_1, ..., x_n$ des réels strictements positifs. Pour tout réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de somme 1, on a :

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = ... = x_n$

Application 34 (TL2 533)**.** [A voir, au moins avoir en tête] On en déduit l'inégalité arithmético-géométrique qui dit que, sous les même hypothèses, on a :

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leq \frac{x_1+...+x_n}{n}$$

Exemple 35 (ROU 396)**.** Soit V un volume donnée. On cherche à construire un parallélépipède rectangle d'aire minimum. On a, en notant x,y,z les côtés de la boîte, $V=xyz$ et $S=2(xy+yz+zx)$. On a $V^{-1/3} \leq \frac{1}{3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = \frac{S}{6V}$. Ainsi $S \geq 6V^{2/3}$ avec égalité si et seulement si $x=y=z$.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(p,q) \in [1,+\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Définition 36 (BP 164)**.** Pour toute fonction $f: \Omega \to \mathbb{K}$ mesurable, on définit $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Proposition 37 (BP 165, FAR 42)**.** [inégalité de Hölder] On a $\forall f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \forall g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, que $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Proposition 38 (FAR 42)**.** [Inégalité de Minkovski] Soient $f,g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors $f+g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Application 39. $\|.\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

3.2 En probabilité

Proposition 40 (No ref)**.** La convexité de l'exponentielle donne $1-x \leq e^{-x}$

Application 41 (BL 93)**.** [grâce à la convexité de l'exponentielle ! !] Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements.

1. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(A_n i.s.) = 0$
2. Si $(A_n)_n$ est indépendante, alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \implies \mathbb{P}(A_n i.s.) = 1$$

Proposition 42 (CAL2 p 72)**.** [processus de Galton Watson, A voir quand je m'entraîne aux développements] Soit $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire idépendante identiquement distribué à valeur dans $\mathbb{N}$. On définit $Z_0 = 1$ et pour tout $n \leq 1$, $Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}$. On pose $m = \mathbb{E}(\xi_1^{(0)})$ et on définit l'évènement d'extinction noté ext comme étant $\{\exists n > 0 | Z_n = 0\}$. Alors :
• $m \leq 1$ et $\xi_1^{(0)}$ n'est pas égale à 1 p.s. implique que $\mathbb{P}(ext) = 1$
• $m > 1$ ou $\xi_1^{(0)}$ set p.s. égale à 1 implique $\mathbb{P}(ext) \in [0, 1[$