

205 Espaces complets. Exemples et applications.

I - Complétude

1. Complétude dans un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique.

Définition 1. On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de E est **de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq N, d(u_p, u_q) < \epsilon$$

[GOU20]
p. 20

Proposition 2. (i) Une suite convergente est de Cauchy.

(ii) Une suite de Cauchy est bornée.

(iii) Une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ .

Contre-exemple 3. La série $\sum \frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy de \mathbb{Q} non convergente dans \mathbb{Q} .

[HAU]
p. 312

Remarque 4. La notion de suite de Cauchy n'est pas topologique : elle ne peut pas être définie à partir des ouverts de E . Cependant, si une suite est de Cauchy pour une certaine distance, alors elle l'est pour toute autre distance équivalente.

[GOU20]
p. 20

Définition 5. E est **complet** si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Exemple 6. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}^n$ est complet mais \mathbb{Q} ne l'est pas.

Proposition 7. (i) Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.

(ii) Toute partie fermée d'un espace complet est complète.

Proposition 8. Soient E_1, \dots, E_n des espaces métriques. Alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est complet si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_i$ est complet.

Proposition 9 (Fermés emboîtés). E est complet si et seulement si toute suite décroissante de fermés non-vides de E dont le diamètre converge vers 0 converge vers un singleton.

Proposition 10 (Critère de Cauchy pour les fonctions). Soit (F, d') un espace métrique complet. Soient $f : A \rightarrow F$ où $A \subseteq E$ et $a \in \overline{A}$. Alors f admet une limite quand x tend vers a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in A, d(a, x) < \eta \text{ et } d(a, y) < \eta \implies d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Théorème 11 (Complété d'un espace métrique). Il existe un espace métrique complet \hat{E} et $i : E \rightarrow \hat{E}$ une isométrie telle que $i(E)$ est dense dans \hat{E} . De plus, \hat{E} est unique à isométrie bijective près.

p. 25

Exemple 12. \mathbb{R} est le complété de \mathbb{Q} .

2. Complétude dans un espace vectoriel normé

Définition 13. Un espace vectoriel normé complet est un **espace de Banach**.

p. 20

Proposition 14. Un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente de E est convergente dans E .

p. 52

Proposition 15. Un espace vectoriel de dimension finie est complet.

Application 16. L'exponentielle d'une matrice est un polynôme en la matrice.

[C-G]
p. 407

3. Exemples et contre-exemples classiques

Contre-exemple 17. L'espace des fonctions polynômiales définies sur $[-1, 1]$ et muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas complet.

[DAN]
p. 45

Exemple 18. Soient X un ensemble et E un espace de Banach. Alors, $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

[GOU20]
p. 21

Exemple 19. Si E est un espace vectoriel normé et F est un espace de Banach, $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

p. 8

[LI]
p. 7

Définition 20. — Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $\mathcal{L}_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ (où \mathcal{L}_p en l'absence d'ambiguïté) l'espace des applications f mesurables de (X, \mathcal{A}, μ) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$$

on note alors $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$.

— On note de même \mathcal{L}_∞ l'espace des applications mesurables de (X, \mathcal{A}, μ) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de sup-essentiel borné. On note alors $\|f\|_\infty$ pour $f \in \mathcal{L}_\infty$.

Remarque 21. En reprenant les notations précédentes, on a $\forall f \in \mathcal{L}_p, \|f\|_p = 0 \iff f = 0$ pp..

Théorème 22 (Inégalité de Minkowski).

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_p, \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Théorème 23. On définit pour tout $p \in [1, +\infty[$,

$$L_p = \mathcal{L}_p / V$$

où $V = \{v \in \mathcal{L}_p \mid v = 0 \text{ pp.}\}$. Muni de $\|\cdot\|_p$, L_p est un espace vectoriel normé.

Théorème 24 (Riesz-Fischer). Pour tout $p \in [1, +\infty[$, L_p est complet pour la norme $\|\cdot\|_p$.

II - Espaces de Hilbert

1. Généralités

Définition 25. Un espace vectoriel H sur le corps \mathbb{K} est un **espace de Hilbert** s'il est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et est complet pour la norme associée $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

p. 31

Exemple 26. Tout espace euclidien ou hermitien est un espace de Hilbert.

Exemple 27. $L_2(\mu)$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \int f \bar{g} d\mu$ est un espace de Hilbert.

Pour toute la suite, on fixe H un espace de Hilbert de norme $\|\cdot\|$ et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé.

Lemme 28 (Identité du parallélogramme).

$$\forall x, y \in H, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire.

[DEV]

Théorème 29 (Projection sur un convexe fermé). Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide. Alors :

$$\forall x \in H, \exists ! y \in C \text{ tel que } d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x, y)$$

On peut donc noter $y = P_C(x)$, le **projeté orthogonal de x sur C** . Il s'agit de l'unique point de C vérifiant

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$$

Théorème 30. Si F est un sous espace vectoriel fermé dans H , alors P_F est une application linéaire continue. De plus, pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

Théorème 31. Si F est un sous espace vectoriel fermé dans H , alors

$$H = F \oplus F^\perp$$

et P_F est la projection sur F parallèlement à F^\perp : c'est la **projection orthogonale** sur F .

Corollaire 32. Soit F un sous-espace vectoriel de H . Alors,

$$\overline{F} = H \iff F^\perp = 0$$

Théorème 33 (de représentation de Riesz).

$$\forall \varphi \in H', \exists ! y \in H, \text{ tel que } \forall x \in H, \varphi(x) = \langle x, y \rangle$$

et de plus, $\|\varphi\| = \|y\|$.

Corollaire 34.

$$\forall T \in H', \exists ! U \in H' \text{ tel que } \forall x, y \in H, \langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle$$

On note alors $U = T^*$: c'est l'**adjoint** de T . On a alors $\|T\| = \|T^*\|$.

Exemple 35 (Opérateur de Voltera). On définit T sur $H = L_2([0, 1])$ par :

$$T : \begin{array}{l} H \rightarrow H \\ f \mapsto x \mapsto \int_0^x f(t) dt \end{array}$$

T est une application linéaire continue et son adjoint T^* est défini par :

$$T^* : g \mapsto \left(x \mapsto \int_x^1 g(t) dt \right)$$

[DEV]

Application 36 (Dual de L_p). Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré de mesure finie. On note $\forall p \in]1, 2[$,

$$\varphi : \begin{array}{l} L_q \rightarrow (L_p)' \\ g \mapsto \left(\varphi_g : f \mapsto \int_X f g d\mu \right) \end{array} \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

[Z-Q]
p. 222

2. Bases hilbertiennes

Définition 37. On dit que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **base hilbertienne** de H si

- (e_n) est orthonormale.
- (e_n) est totale.

[LI]
p. 43

Exemple 38. $(t \mapsto e^{2\pi i n t})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_2([0, 1])$.

Théorème 39. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H . Alors :

$$\forall x \in H, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

On a de plus, pour tout $x, y \in H$, les formules de Parseval :

- $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.
- $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$.

Application 40.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

[GOU20]
p. 272

III - Applications

1. Point fixe

Théorème 41 (Point fixe de Banach). Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application contractant (ie. $\exists k \in]0, 1[$ tel que $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$). Alors,

$$\exists !x \in E \text{ tel que } f(x) = x$$

De plus la suite des itérés définie par $x_0 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x .

p. 21

Application 42 (Théorème de Cauchy-Lipschitz local). Soit E un espace de Banach sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soient I un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de E . Soit $F : I \times \Omega \rightarrow E$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (C)$$

admet une unique solution maximale.

p. 374

2. Prolongement

Théorème 43 (Prolongement des applications uniformément continues). Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques. On suppose F complet. Soient $A \subseteq E$ dense et $f : A \rightarrow F$ une application uniformément continue. Alors, il existe une unique application $\hat{f} : E \rightarrow F$ uniformément continue et telle que $\hat{f}|_A = f$.

[DAN]
p. 47

Corollaire 44. Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques. On suppose F complet. Soient $A \subseteq E$ dense et $f : A \rightarrow F$ une application k -lipschitzienne. Alors, il existe une unique application $\hat{f} : E \rightarrow F$ k -lipschitzienne et telle que $\hat{f}|_A = f$.

Exemple 45. Une application dérivable sur un intervalle $]a, b[$ et de dérivée bornée est prolongeable par une application lipschitzienne sur $[a, b]$.

Application 46 (Théorème de Hahn-Banach analytique). Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H . Soit $f \in F'$. Alors, il existe $\hat{f} \in H'$ telle que $\hat{f}|_F = f$ et $\|\hat{f}\|_H = \|f\|_F$.

[BMP]
p. 106[LI]
p. 94

Application 47 (Transformation de Fourier-Plancherel). La transformation de Fourier \mathcal{F} définie sur $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L_2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

3. Théorème de Baire

Théorème 48 (Baire). On suppose E complet. Alors toute intersection d'ouvert denses est encore dense dans E .

[LI]
p. 111

Application 49. Un espace vectoriel normé à base dénombrable n'est pas complet.

[GOU20]
p. 419

Application 50 (Théorème de Banach-Steinhaus). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $(T_i)_{i \in I}$ des applications linéaires continues telles que

[LI]
p. 112

$$\forall x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty$$

alors,

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty$$

Application 51 (Théorème du graphe fermé). Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$. Si le graphe de T :

$$\{(x, T(x)) \mid x \in E\} \subseteq E \times F$$

est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.

Application 52 (Théorème de l'application ouverte). Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective. Alors,

$$\exists c > 0, T(B_E(0, 1)) \supseteq B_F(0, c)$$

Corollaire 53 (Théorème des isomorphismes de Banach). Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective. Alors T^{-1} est continue.

Corollaire 54. On suppose que E est de Banach. Soient E_1 et E_2 deux supplémentaires algébriques fermés dans E . Alors les projections associées sur E_1 et E_2 sont continues.

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332195-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Les Contre-Exemples en Mathématiques

[HAU]

Bertrand HAUCHECORNE. *Les Contre-Exemples en Mathématiques*. 2^e éd. Ellipses, 13 juin 2007.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/5328-les-contre-exemples-en-mathematiques-9782729834180.html>.

Cours d'analyse fonctionnelle

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^e éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.