

## 204 Connexité. Exemples d'applications.

### I - Diverses approches de la connexité

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

#### 1. Une approche topologique

**Proposition 1.** Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Il n'existe pas de partition de  $E$  en deux ouverts disjoints non vides.
- (ii) Il n'existe pas de partition de  $E$  en deux fermés disjoints non vides.
- (iii) Les seules parties ouvertes de  $E$  sont  $\emptyset$  et  $E$ .

[GOU20]  
p. 38

**Définition 2.** Un espace métrique vérifiant l'une des assertions de Proposition 1 est dit **connexe**.

*Remarque 3.* Remarquons qu'il s'agit-là d'une définition *topologique* : tous les résultats de cette sous-section sont donc valables dans le cadre plus général d'un espace topologique.

**Proposition 4.** Soit  $A \subseteq E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $A$  est connexe.
- (ii) Si  $A \subseteq O_1 \cap O_2$  avec  $O_1, O_2$  ouverts de  $E$  tels que  $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ , alors

$$(A \cap O_1 = \emptyset \text{ et } A \subseteq O_2) \text{ ou } (A \cap O_2 = \emptyset \text{ et } A \subseteq O_1)$$

- (iii) Si  $A \subseteq F_1 \cap F_2$  avec  $F_1, F_2$  fermés de  $E$  tels que  $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ , alors

$$(A \cap F_1 = \emptyset \text{ et } A \subseteq F_2) \text{ ou } (A \cap F_2 = \emptyset \text{ et } A \subseteq F_1)$$

**Exemple 5.**  $\mathbb{Q}$  n'est pas un connexe de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 6.** Une partie ouverte et fermée d'un espace connexe est vide ou égale à l'espace entier.

p. 350

**Proposition 7.** L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

p. 39

p. 44

**Application 8.** Soit  $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors il existe deux points diamétralement opposés de  $\mathbb{U}$  qui ont la même image par  $f$ .

**Corollaire 9.**  $E$  est connexe si et seulement si toute application continue de  $E$  dans  $\{0, 1\}$  est constante.

p. 39

**Proposition 10.** Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de parties connexes de  $E$ . On suppose que

$$\exists i_0 \in I \text{ tel que } \forall i \in I, C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$$

Alors,  $\bigcup_{i \in I} C_i$  est connexe.

**Contre-exemple 11.**  $\{0\}$  et  $\{1\}$  sont des connexes de  $\mathbb{R}$ , mais pas  $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$ .

**Proposition 12.** Un produit fini d'espaces métriques est connexe si et seulement si ces espaces métriques sont tous connexes.

[DEV]

**Application 13.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique compact. Soit  $(u_n)$  une suite de  $E$  telle que  $d(u_n, u_{n-1}) \rightarrow 0$ . Alors l'ensemble  $\Gamma$  des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  est connexe.

[I-P]  
p. 116

**Corollaire 14** (Lemme de la grenouille). Soient  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue et  $(x_n)$  une suite de  $[0, 1]$  telle que

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Alors  $(x_n)$  converge si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ .

## 2. Une approche géométrique

**Définition 15.** On appelle **chemin** de  $E$  toute application  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$  continue. L'image  $\gamma^* = \gamma([0, 1])$  du chemin s'appelle un **arc**,  $\gamma(0)$  l'**origine** de l'arc et  $\gamma(1)$  son **extrémité**.

[GOU20]  
p. 42

**Définition 16.**  $E$  est dit **connexe par arcs** si pour tout  $(a, b) \in E^2$ , il existe un arc inclus dans  $E$  d'origine  $a$  et d'extrémité  $b$ .

*Remarque 17.* Il s'agit là encore d'une définition topologique.

**Théorème 18.** Un espace connexe par arcs est connexe.

**Contre-exemple 19.** L'ensemble

$$\Gamma = \left( \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}^+) \right) \cup \left( \bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}_*^-) \right)$$

est un connexe de  $\mathbb{R}^2$  non connexe par arcs.

**Proposition 20.** La réciproque est vraie dans un ouvert d'un espace vectoriel normé.

**Application 21.**  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$  ne sont pas homéomorphes.

### 3. Une approche algébrique

**Définition 22.** On définit la relation  $\mathcal{R}$  suivante sur  $E$  :

$$x \mathcal{R} y \iff \exists C \subseteq E \text{ connexe tel que } x, y \in C$$

**Proposition 23.** (i)  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$ .

(ii) Si  $x \in E$ , sa classe d'équivalence est la réunion des connexes contenant  $x$ .

**Définition 24.** Une classe d'équivalence pour la relation  $\mathcal{R}$  est une **composante connexe** de  $E$ .

*Remarque 25.*  $E$  est la réunion disjointe de ses composantes connexes.  $E$  est donc connexe s'il n'admet qu'une seule composante connexe.

**Exemple 26.** On se place dans le cadre où  $E$  est un espace vectoriel euclidien. Alors,  $\mathcal{O}(E)$  est non-connexe. Ses composantes connexes sont  $SO(E)$  et  $\{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = -1\}$ .

[ROM21]  
p. 724

**Proposition 27.** Les composantes connexes de  $E$  sont des fermés de  $E$ . Si elles sont en nombre fini, ce sont également des ouverts de  $E$ .

[GOU20]  
p. 41

## II - Exemples d'applications en analyse

### 1. En analyse réelle

**Théorème 28.** Les connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

p. 41

**Théorème 29** (Des valeurs intermédiaires). Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ . Alors  $f(I)$  est un intervalle.

*Remarque 30.* Une autre manière d'écrire ce résultat est que si  $f(a) \leq f(b)$  (resp.  $f(a) \geq f(b)$ ) avec  $a < b$ , alors pour tout  $\gamma \in [f(a), f(b)]$  (resp. pour tout  $\gamma \in [f(b), f(a)]$ ), il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \gamma$ .

**Corollaire 31** (Théorème de Darboux). Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$ . Alors  $f'(I)$  est un intervalle.

p. 47

### 2. En calcul différentiel

**Proposition 32.** Soit  $U$  un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé  $E$ . Soit  $f : U \rightarrow F$  où  $F$  est un espace vectoriel normé. Si  $f$  est différentiable telle que  $\forall x \in U, df_x = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $U$ .

p. 328

**Exemple 33.** Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ouvert connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  telle que la suite  $(f^{(n)})$  converge uniformément sur tout compact de  $\Omega$ . On note  $g$  la limite de la suite  $(f^{(n)})$ . Alors, il existe  $C \in \mathbb{C}$  tel que  $g = C \exp$ .

[BMP]  
p. 80

**Proposition 34.** Soit  $U$  un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé  $E$ . Soit  $f : U \rightarrow E$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\forall x \in U, df_x$  est une isométrie, alors  $f$  est une isométrie affine.

[GOU20]  
p. 349

### 3. En analyse complexe

Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert. On suppose  $\Omega$  connexe. Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Théorème 35** (Zéros isolés). Si  $f$  est une fonction analytique sur  $\Omega$  et si  $f$  n'est pas identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de  $f$  n'admet pas de point d'accumulation dans  $\Omega$ .

[BMP]  
p. 53

**Corollaire 36.** L'ensemble des zéros d'une fonction analytique non nulle sur  $\Omega$  est au plus dénombrable.

*Remarque 37* (Prolongement analytique). Reformulé de manière équivalente au Théorème 35, si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble de  $\Omega$  qui possède un point d'accumulation dans  $\Omega$ , alors elles sont égales sur  $\Omega$ .

**Exemple 38.** Il existe une unique fonction  $g$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

et c'est la fonction identité.

p. 77

**Contre-exemple 39.** Il existe au moins deux fonctions  $g$  holomorphes sur  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

**Application 40** (Transformée de Fourier d'une Gaussienne). On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-itx} dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

p. 83

**Théorème 41** (Principe du maximum). On suppose  $\Omega$  borné et  $f$  holomorphe sur  $\Omega$  et continue sur  $\overline{\Omega}$ . On note  $M$  le maximum de  $f$  sur la frontière de  $\Omega$ . Alors,

- (i) Pour tout  $z \in \Omega$ ,  $|f(z)| \leq M$ .
- (ii) S'il existe  $z_0 \in \Omega$  tel que  $|f(z_0)| = M$ , alors  $f$  est constant sur  $\Omega$ .

p. 72

**Application 42.** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions holomorphes sur  $\Omega$  et continues sur  $\overline{\Omega}$ . Si  $(f_n)$  converge uniformément sur la frontière de  $\Omega$ , alors  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\Omega$  et la limite est holomorphe.

p. 80

**Application 43.** On suppose que  $D(0, 1) \subseteq \Omega$  et  $f$  holomorphe sur  $\Omega$ . On suppose de plus que  $f(0) = 1$  et  $|f(z)| \geq 2$  sur le cercle unité. Alors  $f$  s'annule sur le cercle unité.

### III - Exemple d'application en algèbre

**Proposition 44.**  $GL_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont  $GL_n(\mathbb{R})^+$  et  $GL_n(\mathbb{R})^-$ .

[BMP]  
p. 213

**Application 45.**  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  n'est pas surjective.

**Proposition 46.**  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

[ROM21]  
p. 770

**Lemme 47.** (i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$ .

(ii)  $\exp$  est différentiable en 0 et  $d\exp_0 = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ .

(iii) Soit  $M \in GL_n(\mathbb{C})$ . Alors  $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$ .

[I-P]  
p. 396

**Théorème 48.**  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  est surjective.

[DEV]

**Application 49.**  $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = GL_n(\mathbb{R})^2$ , où  $GL_n(\mathbb{R})^2$  désigne les carrés de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

# Bibliographie

## **Objectif agrégation**

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **L'oral à l'agrégation de mathématiques**

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.