

# 170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$  et de dimension finie  $n$ .

## I - Généralités

### 1. Définitions

**Définition 1.** Soit  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une application.

- On dit que  $\varphi$  est une **forme bilinéaire** sur  $E$  si pour tout  $x \in E$ ,  $y \mapsto \varphi(x, y)$  et pour tout  $y \in E$ ,  $x \mapsto \varphi(x, y)$  sont linéaires.
- Si de plus  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$  pour tout  $x, y \in E$ , on dit que  $\varphi$  est **symétrique**.

[GOU21]  
p. 239

**Définition 2.** On appelle **forme quadratique** sur  $E$  toute application  $q$  de la forme

$$q : x \mapsto \varphi(x, x)$$

où  $\varphi$  est une forme bilinéaire sur  $E$ .

**Exemple 3.** Sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $(x, y, z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$  définit une forme quadratique.

**Proposition 4.** Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ . Il existe une unique forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  telle que  $q(x) = \varphi(x, x)$  pour tout  $x \in E$ .  $\varphi$  est la **forme polaire** de  $q$ , et on a

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$$

**Exemple 5.** Sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $A \mapsto \text{trace}(A)^2$  est une forme quadratique, dont la forme polaire est  $(A, B) \mapsto \text{trace}(A)\text{trace}(B)$ .

p. 248

## 2. Représentation matricielle

p. 229

**Définition 6.** Soient  $q$  une forme quadratique sur  $E$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On appelle **matrice** de  $q$  dans  $\mathcal{B}$  la matrice  $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$  définie par

$$\text{Mat}(q, \mathcal{B}) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j \in [1,n]}$$

où  $\varphi$  est la forme polaire de  $q$ . Le **rang** de  $q$  désigne le rang de cette matrice.

**Exemple 7.** La matrice de la forme quadratique de l'Exemple 3 est

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Proposition 8.** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  dont on note  $P$  la matrice de passage entre ces bases. Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ . Alors,

$$\text{Mat}(q, \mathcal{B}) = {}^t P \text{Mat}(q, \mathcal{B}') P$$

*Remarque 9.* En particulier, en reprenant les notations précédentes,  $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$  et  $\text{Mat}(q, \mathcal{B}')$  sont équivalentes : le rang de  $q$  est bien défini et ne dépend pas de la base considérée.

## II - Orthogonalité et isotropie

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$  de forme polaire  $\varphi$ .

### 1. Définitions et propriétés

**Définition 10.** — On appelle **cône isotrope** de  $q$  l'ensemble

$$C_q = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

- $q$  est dite **définie** si  $C_q = \{0\}$ .
- Les vecteurs de  $C_q$  sont dits **isotropes** pour  $q$ .

**Exemple 11.** La forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^3$  par  $(x, y, z) \mapsto 4x^2 + 3y^2 + 5xy - 3xz + 8yz$  n'est pas définie car  $(0, 0, 1)$  est un vecteur isotrope non nul.

[GRI]  
p. 303[GOU21]  
p. 242

**Définition 12.** — Deux vecteurs  $x, y \in E$  sont dits  $q$ -**orthogonaux** si  $\varphi(x, y) = 0$ . On note cela  $x \perp y$ .

— Si  $A \subseteq E$ , on appelle **orthogonal** de  $A$  l'ensemble  $A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, x \perp y\}$ .

**Proposition 13.** (i) Si  $A \subseteq E$ ,  $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$ .

(ii) Si  $A \subseteq E$ ,  $A \subseteq A^{\perp\perp}$ .

(iii) Si  $A \subseteq B \subseteq E$ ,  $B^\perp \subseteq A^\perp$ .

**Définition 14.** — On appelle **noyau** de  $q$  le sous-espace vectoriel

$$\text{Ker}(q) = E^\perp$$

— On dit que  $q$  est **non-dégénérée** si  $\text{Ker}(q) = \{0\}$  et **dégénérée** si  $\text{Ker}(q) \neq \{0\}$ .

**Proposition 15.** On a  $\text{Ker}(q) \subseteq C_q$ . En particulier, si  $q$  est définie, alors  $q$  est non dégénérée.

**Exemple 16.** Sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$  est une forme quadratique non dégénérée mais non définie non plus.

**Proposition 17.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(i)  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp) - \dim(F \cap \text{Ker}(q))$ .

(ii)  $F^{\perp\perp} = F + \text{Ker}(q)$ .

(iii) Si la restriction de  $q$  à  $F$   $q|_F$  est définie, alors  $E = F \oplus F^\perp$ .

(iv) Si  $q$  est définie,  $F = F^{\perp\perp}$ .

**Proposition 18.** Soit  $A$  la matrice de  $q$  dans une base  $\mathcal{B}$ . Alors,

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(q)$$

**Corollaire 19.**  $q$  est non dégénérée si et seulement si  $\det(\text{Mat}(q, \mathcal{B})) \neq 0$  pour une base quelconque  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

[GRI]  
p. 296

**Exemple 20.** Sur  $\mathbb{R}^4$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - t^2$  est non dégénérée (car de déterminant  $-1$ ).

## 2. Bases $q$ -orthogonales

**Définition 21.** Une base de  $E$  est dite  $q$ -orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux  $q$ -orthogonaux.

[GOU21]  
p. 243

*Remarque 22.* Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base  $q$ -orthogonale, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i)$$

**Théorème 23.** Il existe une base  $q$ -orthogonale de  $E$ .

*Remarque 24.* Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base  $q$ -orthogonale, en posant  $\lambda_i = q(e_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$\forall x \in E, q(x) = q\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i^*(x))^2$$

où  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est la base duale de  $\mathcal{B}$ .

**Théorème 25** (Méthode de Gauss). On écrit

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

et on cherche à écrire  $q$  comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. On a deux cas :

- (i) Il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $a_{i,i} \neq 0$ . On peut supposer  $i = 1$ , on pose alors  $a = a_{1,1}$ . On réécrit  $q$  sous la forme :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= a x_1^2 + x_1 B(x_2, \dots, x_n) + C(x_2, \dots, x_n) \\ &= a \left( x_1 + \frac{B(x_2, \dots, x_n)}{2a} \right)^2 + \left( C(x_2, \dots, x_n) - \frac{B(x_2, \dots, x_n)^2}{4a} \right) \end{aligned}$$

où  $B$  est une forme linéaire et  $C$  une forme quadratique. On itère alors le procédé avec  $C - \frac{B^2}{4a}$ .

- (ii) Sinon. Si  $q = 0$ , c'est terminé. Sinon, il existe un  $a_{i,j}$  non nul. On peut supposer  $(i, j) = (1, 2)$ , on pose alors  $a = a_{1,2}$ . On réécrit  $q$  sous la forme :

$$q(x_1, \dots, x_n) = a x_1 x_2 + x_1 B(x_3, \dots, x_n) + x_2 C(x_3, \dots, x_n) + D(x_3, \dots, x_n)$$

où  $B$  et  $C$  sont des formes linéaires et  $D$  une forme quadratique. En utilisant une

identité remarquable :

$$\begin{aligned} q &= a \left( x_1 + \frac{C}{a} \right) \left( x_2 + \frac{B}{a} \right) + \left( D - \frac{BA}{a} \right) \\ &= \frac{a}{4} \left( \left( x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a} \right)^2 - \left( x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a} \right)^2 \right) + \left( D - \frac{BC}{a} \right) \end{aligned}$$

On itère alors le procédé avec  $D - \frac{BC}{a}$ .

**Exemple 26.** Sur  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= x^2 - 2y^2 + xz + yz \\ &= \left( x + \frac{z}{2} \right)^2 - \frac{z^2}{4} - 2y^2 + yz \\ &= \left( x + \frac{z}{2} \right)^2 - 2 \left( y - \frac{z}{4} \right)^2 + \frac{z^2}{8} - \frac{z^2}{4} \\ &= \left( x + \frac{z}{2} \right)^2 - 2 \left( y - \frac{z}{4} \right)^2 - \frac{z^2}{8} \end{aligned}$$

### III - Classification des formes quadratiques

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ .

#### 1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Théorème 27.** Il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que, si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ , on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

*Remarque 28.* En reprenant les notations précédentes,

$$\text{Mat}(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $r$  est le rang de  $q$  et  $I_r$  la matrice identité de taille  $r$ .

**Corollaire 29.** Il existe une base  $q$ -orthonormée (ie.  $q(e_i) = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) si et seulement si  $\text{rang}(q) = n$  (ie.  $q$  est non dégénérée).

## 2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Définition 30.**  $q$  est dite **positive** (resp. **négative**) si pour tout  $x \in E$ ,  $q(x) \geq 0$  (resp.  $q(x) \leq 0$ ).

[GOU21]  
p. 246

**Théorème 31** (Loi d'inertie de Sylvester).

$$\exists p, q \in \mathbb{N} \text{ et } \exists f_1, \dots, f_{p+q} \in E^* \text{ tels que } q = \sum_{i=1}^p |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^q |f_i|^2$$

où les formes linéaires  $f_i$  sont linéairement indépendantes et où  $p + q \leq n$ . De plus, ces entiers ne dépendent que de  $q$  et pas de la décomposition choisie.

Le couple  $(p, q)$  est la **signature** de  $q$  et le rang  $q$  est égal à  $p + q$ .

*Remarque 32.* En reprenant les notations précédentes, il existe donc une base  $\mathcal{B}$  telle que

$$\text{Mat}(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $r$  est le rang de  $q$  et  $I_r$  la matrice identité de taille  $r$ .

**Corollaire 33.** On note  $\text{sign}(q)$  la signature de  $q$ .

- (i)  $q$  est définie positive si et seulement si  $\text{sign}(q) = (n, 0)$  si et seulement s'il existe des bases  $q$ -orthonormées.
- (ii)  $q$  est définie négative si et seulement si  $\text{sign}(q) = (0, n)$ .
- (iii)  $q$  est non dégénérée si et seulement si  $\text{sign}(q) = (p, n - p)$ .

[GRI]  
p. 310

**Exemple 34.** En reprenant l'Exemple 26, on a  $\text{sign}(q) = (1, 2)$  :  $q$  est de rang 3.

[GOU21]  
p. 247

**Proposition 35.** Si  $q$  est définie, alors ou bien  $q$  est positive, ou bien  $q$  est négative.

### 3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{p^n}$

On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{p^n}$  où  $p, n \in \mathbb{N}$  avec  $p$  premier.

**Définition 36.** On appelle **discriminant** de  $q$  le déterminant de sa matrice dans une base de  $E$ .

[PER]  
p. 130

**Théorème 37.** Soit  $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$  un non-résidu quadratique modulo  $p^n$ . Alors, on a deux classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur  $E$ , de matrices congrues à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$q$  est de l'un ou l'autre type suivant que son discriminant est, ou non, un carré de  $\mathbb{F}_{p^n}$ .

## IV - Applications

### 1. Produit scalaire

On suppose de nouveau  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Définition 38.** On appelle **produit scalaire** sur  $E$  la forme polaire d'une forme quadratique définie positive.

[GOU21]  
p. 252

**Proposition 39** (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit  $q$  une forme quadratique positive sur  $E$  de forme polaire  $\varphi$ . Alors,

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y)^2 \leq q(x)q(y)$$

Si de plus  $q$  est définie, il y a égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

p. 246

**Proposition 40** (Inégalité de Minkowski). Soit  $q$  une forme quadratique positive sur  $E$ . Alors,

$$\forall x, y \in E, \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$$

**Corollaire 41.** Soit  $\varphi$  un produit scalaire sur  $E$ . Alors,

$$\|\cdot\|_{\varphi} : x \mapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$$

est une norme sur  $E$ .

**Proposition 42** (Identité du parallélogramme). En reprenant les notations précédentes,

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|_\varphi^2 + \|x - y\|_\varphi^2 = 2(\|x\|_\varphi^2 + \|y\|_\varphi^2)$$

et cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire.

[L]  
p. 62

## 2. Racines de polynômes

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme de degré  $n$ .

**Notation 43.** On note :

- $x_1, \dots, x_t$  les racines complexes de  $P$  de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_t$ .
- $s_0 = n$  et  $\forall k \geq 1, s_k = \sum_{i=1}^t m_i x_i^k$ .

**Proposition 44.**  $\sigma = \sum_{i,j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} s_{i+j} X_i X_j$  définit une forme quadratique sur  $\mathbb{C}^n$  ainsi qu'une forme quadratique  $\sigma_{\mathbb{R}}$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

[C-G]  
p. 356

**Théorème 45** (Formes de Hankel). On note  $(p, q)$  la signature de  $\sigma_{\mathbb{R}}$ , on a :

- $t = p + q$ .
- Le nombre de racines réelles distinctes de  $P$  est  $p - q$ .

[DEV]

## 3. En analyse

Soit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un ouvert.

**Lemme 46.** Soit  $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  inversible. Alors il existe un voisinage  $V$  de  $A_0$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et une application  $\psi : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall A \in V, A = {}^t \psi(A) A_0 \psi(A)$$

[ROU]  
p. 209

**Lemme 47** (Morse). Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  (où  $U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine). On suppose :

- $df_0 = 0$ .
- La matrice symétrique  $\text{Hess}(f)_0$  est inversible.
- La signature de  $\text{Hess}(f)_0$  est  $(p, n - p)$ .

Alors il existe un difféomorphisme  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  entre deux voisinage de

p. 354

l'origine de  $\mathbb{R}^n$   $V \subseteq U$  et  $W$  tel que  $\varphi(0) = 0$  et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^n \phi_k^2(x)$$

**Application 48.** Soit  $S$  la surface d'équation  $z = f(x, y)$  où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique  $d^2 f_0$  non dégénérée. Alors, en notant  $P$  le plan tangent à  $S$  en  $0$  :

- (i) Si  $d^2 f_0$  est de signature  $(2, 0)$ , alors  $S$  est au-dessus de  $P$  au voisinage de  $0$ .
- (ii) Si  $d^2 f_0$  est de signature  $(0, 2)$ , alors  $S$  est en-dessous de  $P$  au voisinage de  $0$ .
- (iii) Si  $d^2 f_0$  est de signature  $(1, 1)$ , alors  $S$  traverse  $P$  selon une courbe admettant un point double en  $(0, f(0))$ .

# Bibliographie

## **Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries**

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

## **Les maths en tête**

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## **Algèbre Linéaire**

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6<sup>e</sup> éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.

<https://www.cepades.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

## **Cours d'analyse fonctionnelle**

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

## **Cours d'algèbre**

[PER]

Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre. pour l'agrégation*. Ellipses, 15 fév. 1996.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/7778-18110-cours-d-algebre-agregation-9782729855529.html>.

## **Petit guide de calcul différentiel**

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.