

# 158 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie  $n$ . On munit  $E$  d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , qui en fait un **espace euclidien**. On note  $\|\cdot\|$  la norme associée à ce produit scalaire.

## I - Conséquences du caractère euclidien de $E$

### 1. Adjoint d'un endomorphisme

**Lemme 1** (Théorème de représentation de Riesz).

$$\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E \text{ tel que } \forall x \in E, \varphi(x) = \langle x, a \rangle$$

[ROM21]  
p. 718

**Théorème 2.**

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \exists ! u^* \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

**Définition 3.** Avec les notations du théorème précédent, on dit que  $u^*$  est l'**adjoint** de  $u$ .

**Théorème 4.** Soient  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $G = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i, j \in [1, n]}$  la matrice de Gram correspondante. Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  a pour matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors la matrice de  $u^*$  dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$B = G^{-1t} A G$$

En particulier, si  $\mathcal{B}$  est orthonormée, on a  $B = {}^t A$ .

**Proposition 5.**

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \|u\| = \|u^*\|$$

Il en résulte que l'application linéaire (cf. Proposition 6)  $u \mapsto u^*$  est continue pour la norme  $\|\cdot\|$  subordonnée à  $\|\cdot\|$ .

p. 748

## 2. Propriétés de l'adjoint

**Proposition 6** (Propriétés de  $u \mapsto u^*$ ). Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . On a :

- (i)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$ .
- (ii)  $(u^*)^* = u$ .
- (iii)  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ .
- (iv)  $u \in \text{GL}(E) \implies u^* \in \text{GL}(E)$ , et  $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$ .

p. 719

**Proposition 7** (Propriétés de l'endomorphisme adjoint). Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a :

- (i)  $\det(u^*) = \det(u)$ .
- (ii)  $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$ .
- (iii)  $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$ .
- (iv)  $\text{rang}(u^*) = \text{rang}(u)$ .
- (v) Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

**Proposition 8.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

$$u = 0 \iff \text{trace}(u \circ u^*) = 0$$

p. 751

## II - Endomorphismes normaux

**Définition 9.** Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **normal** s'il est tel que  $u \circ u^* = u^* \circ u$ .

p. 743

*Remarque 10.* En désignant par  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice de  $u \in \mathcal{L}(E)$  dans une base ortho-normée,  $u$  est normal si et seulement si,

$${}^tAA = A{}^tA$$

ce qui se traduit en disant que la matrice  $A$  est normale.

**Exemple 11.** Les endomorphismes symétriques, anti-symétriques (Section III) et orthogonaux (Section IV) sont des endomorphismes normaux.

**Proposition 12.**  $u \in \mathcal{L}(E)$  est normal si et seulement si  $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$  pour tout  $x \in E$  où  $\|\cdot\|$  est une norme euclidienne.

p. 758

p. 743

**Proposition 13.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme normal.

- (i) Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .
- (ii) Il existe un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 1 ou 2 stable par  $u$ .

**Proposition 14** (Réduction dans le cas  $n = 2$ ). On suppose  $n = 2$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme normal.

- Si  $u$  a une valeur propre réelle :  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormée.
- Sinon : il existe  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est

$$R(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec  $b \neq 0$ .

**Théorème 15** (Réduction des endomorphismes normaux). Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme normal. Alors, il existe  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est

$$\begin{pmatrix} D_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(a_1, b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R(a_2, b_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R(a_r, b_r) \end{pmatrix}$$

où  $D_p$  est diagonale d'ordre  $p$  et  $R(a, b)$  est définie à la Proposition 14.

### III - Endomorphismes symétriques

#### 1. Définitions et propriétés

**Définition 16.** Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **symétrique** s'il est tel que  $u^* = u$ .

p. 732

**Proposition 17.** Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

**Corollaire 18.**  $\mathcal{S}(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

**Proposition 19.** Si  $u \in \mathcal{S}(E)$ , alors  $u^p \in \mathcal{S}(E)$  pour tout entier naturel  $p$ , et  $v^* \circ u \circ v \in \mathcal{S}(E)$  pour tout  $v \in \mathcal{L}(E)$ .

**Théorème 20 (Spectral).** Tout endomorphisme symétrique  $u \in \mathcal{S}(E)$  se diagonalise dans une base orthonormée.

**Corollaire 21.** Toute matrice symétrique réelle se diagonalise dans une base orthonormée.

## 2. Endomorphismes symétriques positifs

**Définition 22.** — Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **symétrique positif** (resp. **symétrique défini positif**) s'il est symétrique tel que  $\langle x, u(x) \rangle \geq 0$  (resp.  $\langle x, u(x) \rangle > 0$ ) pour tout  $x \in E$ . On note  $\mathcal{S}^+(E)$  (resp.  $\mathcal{S}^{++}(E)$ ) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. symétriques définis positifs).

— Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite **symétrique positive** (resp. **symétrique définie positive**) si elle est symétrique telle que  $\langle x, Ax \rangle \geq 0$  (resp.  $\langle x, Ax \rangle > 0$ ) pour tout  $x \in E$ . On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. symétriques définies positives).

**Théorème 23.** Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . Alors,  $u \in \mathcal{S}^+(E)$  (resp.  $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ ) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

**Corollaire 24.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors,  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  si et seulement s'il existe  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = {}^tBB$ .

**Exemple 25.**

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P \text{ avec } P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Lemme 26.** Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors,

$$\|M\| = \rho(M)$$

où  $\rho$  est l'application qui à une matrice  $y$  associe son rayon spectral.

**Théorème 27.** L'application  $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est un homéomorphisme.

p. 752

[I-P]  
p. 182

[DEV]

### 3. Endomorphismes antisymétriques

**Définition 28.** Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **anti-symétrique** s'il est tel que  $u^* = -u$ .

[ROM21]  
p. 718

**Théorème 29.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme anti-symétrique. Alors, les valeurs propres de  $u$  sont imaginaires pures (éventuellement nulles) et il existe  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est

p. 746

$$\begin{pmatrix} D_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(0, b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R(0, b_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R(0, b_r) \end{pmatrix}$$

où  $D_p$  est diagonale d'ordre  $p$  et  $R(a, b)$  est définie à la Proposition 14.

## IV - Endomorphismes orthogonaux

### 1. Le groupe orthogonal

**Définition 30.** Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **orthogonal** (ou est une **isométrie**) s'il est tel que  $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  pour tout  $x, y \in E$ . On note  $\mathcal{O}(E)$  l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de  $E$ .

p. 720

**Exemple 31.** — Les seules homothéties qui sont des isométries sont  $-\text{id}_E$  et  $\text{id}_E$ .  
— Si  $n = 1$ , on a  $\mathcal{O}(E) = \{\pm \text{id}_E\}$ .

**Proposition 32.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

p. 743

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\| \iff u \in \text{GL}(E) \text{ et } u^{-1} = u^*$$

**Théorème 33.** Les isométries sont des automorphismes. Il en résulte que  $\mathcal{O}(E)$  est un sous-groupe de  $\text{GL}(E)$ .

p. 721

*Remarque 34.* Ce n'est pas vrai en dimension infinie.

**Théorème 35.** Un endomorphisme de  $E$  est une isométrie si et seulement s'il transforme toute base orthonormée de  $E$  en une base orthonormée.

**Théorème 36.** Un endomorphisme de  $E$  est une isométrie si et seulement si sa matrice  $A$  dans une base orthonormée est inversible, d'inverse  ${}^t A$ .

On dit alors que  $A$  est **orthogonale**.

**Notation 37.** On note  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  le groupe des matrices orthogonales.

**Théorème 38.**

$$\forall u \in \mathcal{O}(E), \det(u) = \pm 1$$

*Remarque 39.* On a des résultats équivalents pour les matrices.

**Théorème 40** (Réduction des endomorphismes orthogonaux). Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Alors, il existe  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où  $R_i = R(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$  avec  $R(a, b)$  définie à la Proposition 14 et  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \theta_i \in ]0, 2\pi[$ .

**Lemme 41.**

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \exists ! B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = A$$

[C-G]  
p. 376

[DEV]

**Théorème 42** (Décomposition polaire). L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

## 2. Étude en dimensions 2 et 3

**Définition 43.** On définit  $\text{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$  et  $\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$

[GRI]  
p. 241

**Proposition 44.**  $\text{SO}(E)$  est un sous-groupe distingué de  $\mathcal{O}(E)$  d'indice 2 (de même que  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ).

[ROM21]  
p. 724

**Exemple 45.**

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$$

[GRI]  
p. 241

**Théorème 46.** Soit  $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ . Alors :

— Si  $A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$  :

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(rotation d'angle  $\theta$ ).

— Si  $A \notin \text{SO}_2(\mathbb{R})$  :

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire  $\frac{\theta}{2}$ ).

**Théorème 47.** On suppose  $n = 3$ . Soit  $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$  et  $u$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base canonique est  $A$ . Alors, il existe  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

avec  $\epsilon = \pm 1$ . On note  $E_\epsilon$  le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre  $\epsilon$ .

— Si  $\epsilon = 1$  :  $f \in \text{SO}(E)$  est la rotation d'angle  $2 \cos(\theta) + 1$  autour de l'axe  $E_1$ .

— Si  $\epsilon = -1$  :  $f \notin \text{SO}(E)$  est la composée de la rotation d'angle  $2 \cos(\theta) - 1$  autour de l'axe  $E_{-1}$  avec la symétrie orthogonale par rapport à  $E_{-1}^\perp$ .

### 3. Propriétés topologiques

**Proposition 48.**  $\mathcal{O}(E)$  est une partie compacte de  $\mathcal{L}(E)$ .

[ROM21]  
p. 722

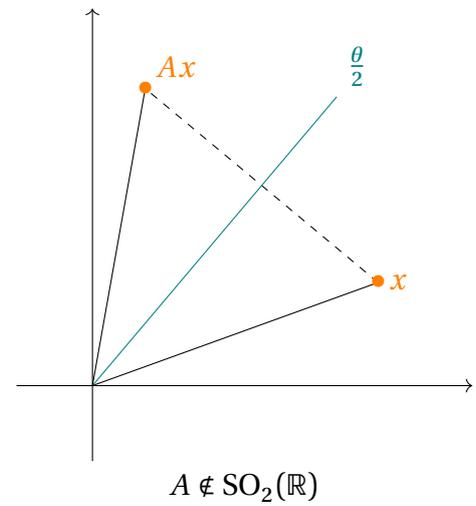
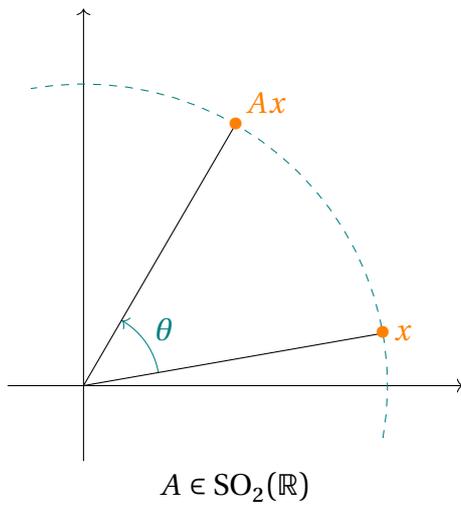
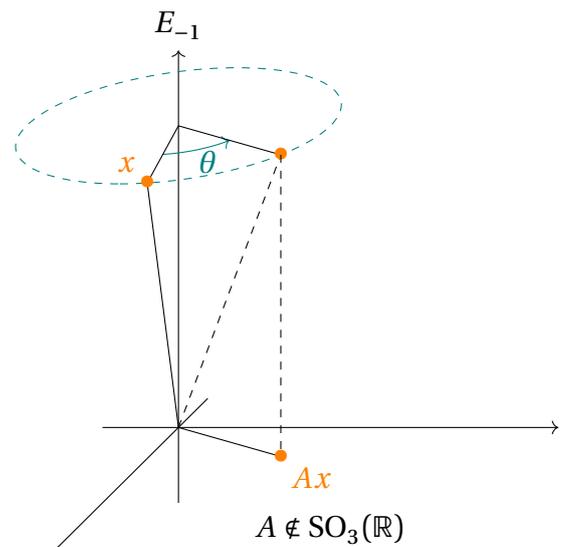
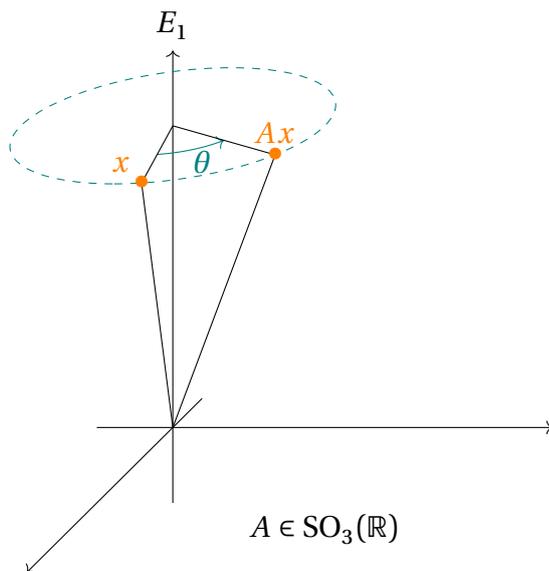
**Proposition 49.**  $SO(E)$  est connexe dans  $\mathcal{O}(E)$ .

**Corollaire 50.**  $\mathcal{O}(E)$  est non-connexe. Ses composantes connexes sont  $SO(E)$  et  $\{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = -1\}$ .

**Proposition 51.** Tout sous-groupe compact de  $GL(E)$  qui contient  $\mathcal{O}(E)$  est égal à  $\mathcal{O}(E)$ .

p. 756

## Annexes

[GRI]  
p. 242FIGURE 1 – Le groupe  $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ .

p. 244

FIGURE 2 – Le groupe  $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ .

# Bibliographie

## **Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries**

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

## **Algèbre Linéaire**

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6<sup>e</sup> éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.

<https://www.cepadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

## **L'oral à l'agrégation de mathématiques**

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.