

# 150 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

## I - Polynômes d'endomorphismes

### 1. L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

**Notation 1.** On note  $u^0 = \text{id}_E$  et

$$u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$$

[ROM21]  
p. 603

**Définition 2.** À tout polynôme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$  on fait correspondre l'endomorphisme  $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$ .

**Proposition 3.** L'ensemble,

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$ , de dimension inférieure ou égale à  $n^2$ .

*Remarque 4.* Au vu de l'isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on définit de même  $\mathbb{K}[A]$  pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ , alors pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P(A)$  est la matrice de  $P(u)$  dans cette même base. Toutes les propriétés énoncées pour les endomorphismes sont vraies pour les matrices, et réciproquement.

**Proposition 5.** Soient  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  triangulaire de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

[GOU21]  
p. 184

et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Alors,  $P(M)$  est de la forme

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(\alpha_1) & * & \dots & * \\ 0 & P(\alpha_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & P(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

## 2. Polynôme caractéristique de $u$

**Définition 6.** Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- On dit que  $\lambda$  est **valeur propre** de  $u$  si  $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ .
- Un vecteur  $x \neq 0$  tel que  $u(x) = \lambda x$  est un **vecteur propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .
- $E_\lambda$  est le **sous-espace propre** associé à la valeur propre  $\lambda$ .
- L'ensemble des valeurs propres de  $u$  est appelé **spectre** de  $u$ . On le note  $\text{Sp}(u)$ .

[ROM21]  
p. 643

**Proposition 7.** En notant  $\chi_u = \det(X \text{id}_E - u)$ ,

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \chi_u(\lambda) = 0\}$$

**Théorème 8.** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$  (voir Définition 6),  $P(\lambda)$  est une valeur propre de  $P(u)$ . Si le corps  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, on a alors

$$\text{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}$$

p. 604

**Contre-exemple 9.** Pour  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $P = X^2$ , on a  $A^2 = -I_2$  et  $\text{Sp}(A) = \emptyset$ .

**Définition 10.** Le polynôme  $\chi_u$  précédent est appelé **polynôme caractéristique** de  $u$ .

p. 644

*Remarque 11.* On peut définir de la même manière les mêmes notions pour une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (une valeur est propre pour une matrice si et seulement si elle l'est pour l'endomorphisme associé). On reprendra les mêmes notations.

**Exemple 12.** Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , on a  $\chi_A = X^2 - \text{trace}(A)X + \det(A)$ .

**Proposition 13.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  de multiplicité  $\alpha$  en tant que racine de  $\chi_u$ . Alors,

$$\dim(E_\lambda) \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket$$

**Proposition 14.** (i) Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

(ii) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $\chi_A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . Alors,  $a_0 = \det(A)$  et  $a_{n-1} = \text{trace}(A)$  (à un signe près).

[GOU21]  
p. 172

### 3. Polynôme minimal de $u$

**Lemme 15.** (i)  $\text{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{K}[u]$  non réduit au polynôme nul.

(ii)  $\text{Ann}(u)$  est le noyau de  $P \mapsto P(u)$  : c'est un idéal de  $\mathbb{K}[u]$ .

(iii) Il existe un unique polynôme unitaire engendrant cet idéal.

[ROM21]  
p. 604

**Définition 16.** On appelle **idéal annulateur** de  $u$  l'idéal  $\text{Ann}(u)$ . Le polynôme unitaire générateur est noté  $\pi_u$  et est appelé **polynôme minimal** de  $u$ .

*Remarque 17.* —  $\pi_u$  est le polynôme unitaire de plus petit degré annihilant  $u$ .

— Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ , on a  $\text{Ann}(u) = \text{Ann}(A)$  et  $\pi_u = \pi_A$ .

**Exemple 18.** Un endomorphisme est nilpotent d'indice  $q$  si et seulement si son polynôme minimal est  $X^q$ .

**Proposition 19.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Alors, le polynôme minimal de l'endomorphisme  $u|_F : F \rightarrow F$  divise  $\pi_u$ .

**Proposition 20.** (i) Les valeurs propres de  $u$  sont racines de tout polynôme annulateur.

(ii) Les valeurs propres de  $u$  sont exactement les racines de  $\pi_u$ .

*Remarque 21.*  $\pi_u$  et  $\chi_u$  partagent donc les mêmes racines.

[GOU21]  
p. 186

**Théorème 22.**  $P \mapsto P(u)$  induit un isomorphisme :

$$\mathbb{K}[X]/(\pi_u) \cong \mathbb{K}[u]$$

[ROM21]  
p. 606

**Corollaire 23.** L'espace vectoriel  $\mathbb{K}[u]$  est de dimension égale à  $p_u = \deg(\pi_u)$ , une base étant donnée par  $(u^k)_{k \in \llbracket 1, p_u \rrbracket}$ .

**Corollaire 24.**

$$\mathbb{K}[u] \text{ est un corps} \iff \mathbb{K}[u] \text{ est int\grave{e}gre} \iff u \text{ est irr\^{e}ductible}$$

**Théorème 25** (Cayley-Hamilton).

$$\pi_u \mid \chi_u$$

**Corollaire 26.**

$$\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n$$

**Corollaire 27.** Si  $u$  est inversible,

$$u^{-1} = -\frac{1}{\det(u)} \sum_{k=1}^n a_k u^{k-1}$$

En particulier,  $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$ .

**Corollaire 28.**  $u$  est nilpotent si et seulement si  $\chi_u = X^n$ .

## II - Réduction d'endomorphismes

### 1. Diagonalisation

**Définition 29.** — On dit que  $u$  est **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

— On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

p. 683

*Remarque 30.*  $u$  est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base de  $E$  l'est.

**Exemple 31.** — Les projecteurs (ie. les endomorphismes  $p \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $p^2 = p$ ) sont toujours diagonalisables, à valeurs propres dans  $\{0, 1\}$ .

— Les symétries (ie. les endomorphismes  $s \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $s^2 = \text{id}_E$ ) sont toujours diagonalisables, à valeurs propres dans  $\{\pm 1\}$ . Par exemple, l'endomorphisme de trans-

[BMP]  
p. 166

position  $A \mapsto {}^t A$  est diagonalisable.

**Proposition 32.** Si  $u$  a  $n$  valeurs propres distinctes dans  $\mathbb{K}$ , alors il est diagonalisable.

[ROM21]  
p. 683

**Théorème 33** (Lemme des noyaux). Soit  $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$  où les polynômes  $P_1, \dots, P_k$  sont premiers entre eux deux à deux. Alors,

p. 609

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i(u))$$

**Théorème 34.** Soit  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

p. 683

- (i)  $u$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ .
- (ii)  $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}$ .
- (iii)  $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}) = n$ .
- (iv)  $\chi_n$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la dimension de  $E_{\lambda_k}$  est égale à la multiplicité de  $\lambda_k$  dans  $\chi_u$ .
- (v)  $\exists P \in \text{Ann}(u)$  scindé à racines simples.
- (vi)  $\pi_u$  est scindé à racines simples.

**Exemple 35.**  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  est diagonalisable, semblable à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ .

[GOU21]  
p. 177

**Théorème 36** (Diagonalisation simultanée). Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes de  $E$  diagonalisables. Il existe une base commune de diagonalisation dans  $E$  pour  $(u_i)_{i \in I}$  si et seulement si ces endomorphismes commutent deux-à-deux.

[ROM21]  
p. 684

**Théorème 37** (Spectral). Tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormée.

p. 734

## 2. Trigonalisation

p. 675

**Définition 38.** — On dit que  $u$  est **trigonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.

— On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

*Remarque 39.*  $u$  est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base de  $E$  l'est.

**Exemple 40.** Une matrice à coefficients réels ayant des valeurs propres imaginaires pures n'est pas trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Théorème 41.**  $u$  est trigonalisable sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

**Corollaire 42.** Si  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, tout endomorphisme de  $u$  est trigonalisable sur  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 43.** Si  $u$  est trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres et son déterminant est le produit de ses valeurs propres.

**Théorème 44** (Trigonalisation simultanée). Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes de  $E$  diagonalisables qui commutent deux-à-deux. Alors, il existe une base commune de trigonalisation.

## 3. Décomposition de Dunford

[DEV]

**Théorème 45** (Décomposition de Dunford). On suppose que  $\pi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Alors il existe un unique couple d'endomorphismes  $(d, n)$  tels que :

- $d$  est diagonalisable et  $n$  est nilpotent.
- $u = d + n$ .
- $dn = nd$ .

[GOU21]  
p. 203

**Corollaire 46.** Si  $u$  vérifie les hypothèses précédentes, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u^k = (d + n)^k = \sum_{i=0}^m \binom{k}{i} d^i n^{k-i}$ , avec  $m = \min(k, l)$  où  $l$  désigne l'indice de nilpotence de  $n$ .

*Remarque 47.* On peut montrer de plus que  $d$  et  $n$  sont des polynômes en  $u$ .

### III - Applications

#### 1. Commutant

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Notation 48.** On note  $\mathcal{C}(A)$  le commutant de  $A$ .

[FGN2]  
p. 160

**Lemme 49.**

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}(A)) \geq n$$

[DEV]

**Application 50.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $\mathcal{C}(A)$  le commutant de  $A$ . Alors,

$$\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A) \iff \pi_A = \chi_A = \det(XI_n - A)$$

#### 2. Exponentielles de matrices

**Lemme 51.** (i) La série entière  $\sum \frac{z^k}{k!}$  a un rayon de convergence infini.

(ii)  $\sum \frac{A^k}{k!}$  est convergente pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

[ROM21]  
p. 761

**Définition 52.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On définit l'**exponentielle** de  $A$  par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

on la note aussi  $\exp(A)$  ou  $e^A$ .

**Théorème 53.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- (i)  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est continue.
- (ii) Si  $A$  est nilpotente d'indice  $q$ ,  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A^k}{k!}$ .
- (iii)  $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$ . En particulier,  $\exp(A)$  commute avec  $A$ .
- (iv) Si  $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , alors  $\exp(A) = \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ .
- (v) Si  $B = PAP^{-1}$  pour  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $e^B = P^{-1}e^AP$ .
- (vi)  $\det(e^A) = e^{\text{trace}(A)}$ .
- (vii)  $t \mapsto e^{tA}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de dérivée  $t \mapsto e^{tA}A$ .

**Proposition 54.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent. Alors,

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$$

**Corollaire 55.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors,  $e^A$  est inversible, d'inverse  $e^{-A}$ .

**Exemple 56.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui admet une décomposition de Dunford  $A = D + N$  où  $D$  est diagonalisable et  $N$  est nilpotente d'indice  $q$ . Alors,

$$— e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}.$$

— La décomposition de Dunford de  $e^A$  est  $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$  avec  $e^D$  diagonalisable et  $e^D(e^N - I_n)$  nilpotente.

**Application 57.** Une équation différentielle linéaire homogène  $(H) : Y' = AY$  (où  $A$  est constante en  $t$ ) a ses solutions maximales définies sur  $\mathbb{R}$  et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution  $t \mapsto e^{tA}y_0$ .

[GOU20]  
p. 380

**Application 58** (Équation de Sylvester). Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , l'équation  $AX + XB = C$  admet une unique solution  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

[I-P]  
p. 177

### 3. Étude d'une suite de polygones

**Lemme 59** (Déterminant circulant). Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

[GOU21]  
p. 153

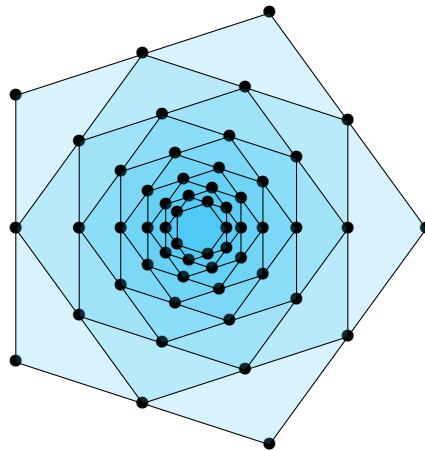
**Application 60** (Suite de polygones). Soit  $P_0$  un polygone dont les sommets sont  $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$ . On définit la suite de polygones  $(P_k)$  par récurrence en disant que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les sommets de  $P_{k+1}$  sont les milieux des arêtes de  $P_k$ .

[I-P]  
p. 389



Alors la suite  $(P_k)$  converge vers l'isobarycentre de  $P_0$ .

## Annexes



[I-P]  
p. 389

FIGURE 1 – La suite de polygones.

# Bibliographie

## Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## Oraux X-ENS Mathématiques

[FGN2]

Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 2*. 2<sup>e</sup> éd. Cassini, 16 mars 2021.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/111-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-2.html>.

## Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.