NOM : BOLLE Prénom : Quentin Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Langages rationnels. Exemples. Applications. 909 (1)

Autre sujet :

<u>Prérequis</u> : Automate fini, langage reconnaissable, clôture par les opérations booléennes (union, intersection, complément) et par les opérations de langage (concaténation, étoile).

I] <u>Définitions et place dans la hiérarchie de Chomsky</u>

1) <u>Rat(Σ), expressions rationnels</u>

Dans la suite, on se donne un alphabet Σ non vide.

<u>Def</u> : (Langage rationnel ; Rat Σ)
On définit l'ensemble des <u>langages rationnels</u> sur Σ, noté <u>Rat Σ</u>, comme étant la famille de langages de Σ^* qui :
- contient les parties finies de A^* (dont $\emptyset$).
- est close pour les opérations d'union, de concaténation et d'étoile.

<u>Commentaire</u> : Intérêt de cette définition par rapport aux prérequis.

<u>Def</u> : (Expression rationnelle)
On appelle <u>expression rationnelle</u> sur Σ toute formule obtenue inductivement à partir des lettres de Σ et des fonctions $\{0, \varepsilon, +, \cdot, *\}$ de la manière suivante :
i) 0, ε et a ($a \in \Sigma$) sont des expressions rationnelles
ii) si E et F sont deux expressions rationnelles, il en est de même pour $(E+F)$, $(E \cdot F)$ et (E^*).

<u>Commentaire</u> : i) Lien avec Rat Σ
ii) Expressions "équivalentes"

2) <u>Hiérarchie de Chomsky</u>

Les langages rationnels sont le 3ᵉ niveau de la hiérarchie de Chomsky.

a) <u>2ᵉ niveau : langage algébrique</u>

<u>Prop</u> : Un langage rationnel est un langage algébrique engendré par une grammaire de la forme suivante (dite grammaire régulière) :
$$X \to aY$$
$$X \to a$$
$$X \to \varepsilon$$
où $\begin{cases} X, Y \text{ sont des variables non terminales et} \\ a \text{ est une variable terminale} \end{cases}$

b) <u>Niveau zéro : Machine de Turing</u>

Sans perte de généralité, on pose $\Sigma = \{a, b\}$.

<u>Prop</u> Un langage rationnel est un langage reconnu par une machine de Turing déterministe avec un ruban d'entrée en lecture seule et un ruban de travail borné (soit DSPACE(1))

<u>Commentaire</u> : "mémoire" d'un langage rationnel

$\boxed{\text{Th : Si } s(n) = o(\log(\log n)), \text{ alors on a } \mathrm{DSPACE}(s(n)) = \mathrm{DSPACE}(1) = \mathrm{Rat}(\Sigma)}$

<u>DEVELOPPEMENT 1</u>

Référence :
- <u>Eléments de théorie des automates</u>, J. Sakarovitch
- <u>Introduction to automata theory, languages and computation</u>, J.E. Hopcroft et J. D. Ullman
- Sipser
- LFCC

NOM : BOLLE **Prénom :** Quentin **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : Langages rationnels. Exemples. Applications

Autre sujet :

(2)

II] Exemples

1) Utilisation des automates

__Théorème de Kleene__ : La famille des langages reconnaissables est exactement $Rat(\Sigma)$

__Corollaire__ : $Rat(\Sigma)$ est stable par intersection et passage au complémentaire.

__Commentaire__ : Algorithme de McNaughton et Yamada
↳ expression rationnelle.

a) Langages minces

__Def__ : • Un __rayon__ est un ensemble de mots décrit par l'expression rationnelle uv^*w.
• Un langage est __mince__ si c'est une union finie de rayons.

__Def__ : Un langage est __à croissance bornée__ si son nombre de mots de longueurs n est borné par une constante, indépendamment de n

__Th__ : Les langages rationnels à croissance bornée sont exactement tous les langages minces

DEVELOPPEMENT 2

b) Racine de langage.

__Prop__ : Pour $L \subset \Sigma^*$, on note $\sqrt{L} = \{f \in \Sigma^* \mid ff \in L\}$
Si L est rationnel, alors $\sqrt{L}$ est aussi rationnel

2) Limites des langages rationnels

__Lemme de l'étoile (simpliste)__ : Si L est rationnel, il existe un entier N tel que :

$$\left.\begin{array}{l}\forall f \in L \\ |f| > N\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\exists f = uvw,\ v \neq \varepsilon \\ uv^*w \in L\end{array}$$

__Exemple__ : $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel

__Lemme de l'étoile__ : Si L est rationnel, il existe un entier N tel que :

$$\left.\begin{array}{l}\forall f \in L \\ \forall f = g_1 h g_2,\ |h| \geq N\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\exists h = uvw,\ v \neq \varepsilon \\ g_1 uv^*w g_2 \in L\end{array}$$

__Exemple__ : $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \Sigma^* ba \Sigma^*$ ne satisfait pas le lemme de l'étoile, mais vérifie le lemme simpliste.

__Commentaire__ : Condition Nécessaire, non suffisante

__Notation__ : Pour $X \subset \Sigma^*$ et $f \in \Sigma^*$, on note $f^{-1}X = \{u \in \Sigma^* \mid fu \in X\}$

__Th__ : Un langage L est rationnel ssi la famille des parties $f^{-1}L$, pour tout $f \in \Sigma^*$, est finie.

__Commentaire__ : Minimisation des automates

NÉRODE !!

• lim croissante → pas clos
• Eq reconnu par langage rationnel → l'hérédité

NOM : BOLLE **Prénom :** Quentin **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : Langages rationnels. Exemples. Applications.

Autre sujet :

3

III) Applications

1) Analyse lexicale

Expression des lexèmes d'un langage de programmation (1er stade de compilation)

Exemple : IDENTIFIER : (lettre)(lettre + chiffre)*
NUMBER : (chiffre \ 0) (chiffre)*

Méthode : 1) Partir de l'expression rationnel
2) Construire un automate non déterministe avec ε-transitions
3) Construire dans l'action un automate déterministe équivalent.

2) Recherche de chaînes de caractères

Recherche unique
Algorithme de Knuth-Morris-Pratt

Recherche multiple
Algorithme de Aho-Corasick
↳ Commande gerp grep sur Unix

3) Décidabilité de l'arithmétique de Presburger

Def : La théorie Th(ℕ, +) est appelé arithmétique de Presburger

Th : L'arithmétique de Presburger est décidable.