106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur un corps $\mathbb{K}$.

I - Étude du groupe linéaire

1. $\mathrm{GL}(E)$ et son lien avec l'algèbre des matrices

Définition 1. Le **groupe linéaire** de E est le groupe des applications $\mathbb{K}$-linéaires bijectives de E dans E. [ROM21] p. 139

Remarque 2. Le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme d'algèbre de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et cet isomorphisme induit un isomorphisme de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Cet isomorphisme se définit à l'aide du choix d'une base, il n'est donc pas canonique. [PER] p. 95

Pour cette raison, on pourra par la suite confondre $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3. $\det : \mathrm{GL}(E) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme surjectif.

Théorème 4. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes : [ROM21] p. 140

(i) $u \in \mathrm{GL}(E)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$.

(iii) $\mathrm{Im}(u) = E$.

(iv) $\mathrm{rang}(u) = n$.

(v) $\det(u) = 0$.

(vi) u transforme toute base de E en une base de E.

(vii) Il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{id}_E$.

(viii) Il existe $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que $w \circ u = \mathrm{id}_E$.

2. Centre

Proposition 5. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ un endomorphisme laissant invariantes toutes les droites vectorielles de E. Alors u est une homothétie. [PER] p. 98

Théorème 6.

$$\mathrm{GL}(E) = \mathbb{K}^* \cdot \mathrm{id}_E$$

3. Sous-groupes notables

a. Groupe orthogonal

Définition 7. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **orthogonal** (ou est une **isométrie**) s'il est tel que $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout $x, y \in E$. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E. [ROM21] p. 720

Exemple 8. — Les seules homothéties qui sont des isométries sont $-\mathrm{id}_E$ et id_E.
— Si $n = 1$, on a $\mathcal{O}(E) = \{\pm \mathrm{id}_E\}$.

Proposition 9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. p. 743

$$u = \mathcal{O}(E) \iff \forall x \in E, \|u(x)\| \iff u \in \mathrm{GL}(E) \text{ et } u^{-1} = u^*$$

Théorème 10. Les isométries sont des automorphismes. Il en résulte que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. p. 721

Remarque 11. Ce n'est pas vrai en dimension infinie.

Théorème 12. Un endomorphisme de E est une isométrie si et seulement s'il transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée.

Théorème 13. Un endomorphisme de E est une isométrie si et seulement si sa matrice A dans une base orthonormée est inversible, d'inverse ${}^tA$.

On dit alors que A est **orthogonale**.

Notation 14. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales.

Théorème 15.

$$\forall u \in \mathcal{O}(E), \det(u) = \pm 1$$

Remarque 16. On a des résultats équivalents pour les matrices.

Théorème 17 (Réduction des endomorphismes orthogonaux)**.** Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors, il existe

$\mathscr{B}$ une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où $R_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\theta_i \in]0, 2\pi[$.

b. Groupe spécial linéaire

Définition 18. On définit $\mathrm{SL}(E) = \mathrm{Ker}(\det)$ le **groupe spécial linéaire** de E. p. 141

Remarque 19. On peut définir de manière analogue $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, et on a encore un isomorphisme entre ces deux groupes.

Théorème 20. $\mathrm{SL}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(E)$. Le groupe quotient $\mathrm{GL}(E)/\mathrm{SL}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$ et on a la suite exacte :

$$\{\mathrm{id}_E\} \to \mathrm{SL}(E) \to \mathrm{GL}(E) \xrightarrow{\det} \mathbb{K}^* \to \{\mathrm{id}_E\}$$

Théorème 21.

$$Z(\mathrm{SL}(E)) = \mu_n(\mathbb{K}) \cdot \mathrm{id}_E$$

où $\mu_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe des racines de l'unité de $\mathbb{K}$.

Proposition 22. Soit $u \in \mathrm{GL}(E) \setminus \{\mathrm{id}_E\}$. Soit H un hyperplan de E tel que $u_{|H} = \mathrm{id}_H$. Les assertions suivantes sont équivalentes : **[PER]** p. 97

(i) $\det(u) = 1$.

(ii) u n'est pas diagonalisable.

(iii) $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) \subseteq H$.

(iv) Le morphisme induit $\overline{u} : E/H \to E/H$ est l'identité de E/H.

(v) En notant $H = \mathrm{Ker}(f)$ (où f désigne une forme linéaire sur E), il existe $a \in H \setminus \{0\}$ tel que

$$u = \mathrm{id}_E + f \cdot a$$

(vi) Dans une base adaptée, la matrice de u s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 23. En reprenant les notations précédentes, on dit que u est une **transvection** d'hyperplan H et de droite $\mathrm{Vect}(a)$.

Proposition 24. Soient $u \in \mathrm{GL}(E)$ et τ une transvection d'hyperplan H et de droite D. Alors, $u \tau u^{-1}$ est une transvection d'hyperplan $u(H)$ et de droite $u(D)$.

Théorème 25. Si $n \geq 2$, les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$.

4. Générateurs

Proposition 26. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Soit H un hyperplan de E tel que $u_{|H} = \mathrm{id}_H$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\det(u) = \lambda \neq 1$.

(ii) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$.

(iii) $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) \not\subseteq H$.

(iv) Dans une base adaptée, la matrice de u s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \neq 1$.

Définition 27. En reprenant les notations précédentes, on dit que u est une **dilatation** de rapport λ.

Théorème 28. Si $n \geq 2$, les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(E)$.

Notation 29. Soit $a \in \mathbb{F}_p$. On note $\left(\frac{a}{p}\right)$ le symbole de Legendre de a modulo p. [I-P] p. 203

Lemme 30. Soient $p \geq 3$ un nombre premier et V un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ de dimension finie. Les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(V)$.

[DEV]

Application 31 (Théorème de Frobenius-Zolotarev)**.** Soient $p \geq 3$ un nombre premier et V un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ de dimension finie.

$$\forall u \in \mathrm{GL}(V), \epsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$$

où u est vu comme une permutation des éléments de V.

5. Groupes projectifs

Définition 32. On définit $\mathrm{PGL}(E)$ (resp. $\mathrm{PSL}(E)$) le quotient de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{SL}(E)$) par son centre. [ROM21] p. 141

Proposition 33.

$$Z(\mathrm{PGL}(E)) = Z(\mathrm{PSL}(E)) = \{\mathrm{id}_E\}$$

On se place pour la suite de cette sous-section dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$. [ULM21] p. 124

Proposition 34. Les groupes précédents sont finis, et :

(i) $|\mathrm{GL}(E)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}((q^n - 1)\dots(q-1))$.

(ii) $|\mathrm{PGL}(E)| = |\mathrm{SL}(E)| = \frac{|\mathrm{GL}(E)|}{q-1}$.

(iii) $|\mathrm{PSL}(E)| = |\mathrm{SL}(E)| = \frac{|\mathrm{GL}(E)|}{(q-1)\,\mathrm{pgcd}(n,q-1)}$.

Application 35. Pour tout entier $p \in [\![1, n]\!]$, il y a [ROM21] p. 157

$$\frac{\prod_{k=n-(p-1)}^{n}(q^k - 1)}{\prod_{k=1}^{p}(q^k - 1)}$$

sous-espaces vectoriels de dimension p dans E.

II - Actions sur l'algèbre des matrices

1. Action par translation

Proposition 36. Les applications [ROM21] p. 184

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \mapsto & PA \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \mapsto & AP^{-1} \end{array}$$

définissent une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 37. Pour la première action, deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même noyau. Pour la seconde, deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même image.

Lemme 38. [C-G] p. 376

$$\forall A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})\, \exists! B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = A$$

[DEV]

Théorème 39 (Décomposition polaire)**.** L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Remarque 40. Ainsi, pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe un représentant de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ pour l'action par translation à gauche.

2. Action par conjugaison

Proposition 41. L'application [ROM21] p. 199

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \mapsto & PAP^{-1} \end{array}$$

définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 42. Deux matrices qui sont dans la même orbite pour cette action sont dites **semblables**.

Remarque 43. Deux matrices semblables représentes la même application linéaire dans deux bases de $\mathbb{K}^n$. [GOU21] p. 127

[ROM21] p. 199

Théorème 44. Soient A et B deux matrices semblables. Alors :

— $\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(B)$.

— $\det(A) = \det(B)$.

— $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$.

— $\chi_A = \chi_B$.

— $\pi_A = \pi_B$.

Contre-exemple 45. Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont la même trace, le même déterminant, le même polynôme caractéristique, mais ne sont pas semblables. [D-L] p. 137

Théorème 46. Soient $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $\mathbb{K}$ infini et A, B semblables sur $\mathbb{L}$. Alors A et B sont semblables sur $\mathbb{K}$. [GOU21] p. 167

3. Action par congruence

On suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2. [ROM21] p. 206

Proposition 47. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \mapsto & PA{}^tP \end{array}$$

définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Définition 48. Deux matrices qui sont dans la même orbite pour cette action sont dites **congruentes**.

Remarque 49. Deux matrices congruentes représentent la même forme quadratique dans deux bases de $\mathbb{K}^n$.

Théorème 50 (Spectral)**.** Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.

Théorème 51. (i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: deux matrices symétriques A et B sont congruentes si et seulement si elles ont même rang. Les orbites pour cette action sont les ensembles

$$\mathcal{O}_r = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{rang}(A) = r\}$$

pour $r \in [\![1, n]\!]$.

(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: deux matrices symétriques A et B sont congruentes si et seulement si elles ont même signature. Les orbites pour cette action sont les ensembles

$$\mathcal{O}_{(s,r)} = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{sign}(\Phi_A) = (s,t)\}$$

où Φ_A désigne la forme quadratique associée à une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$: deux matrices symétriques A et B sont congruentes si et seulement si elles même déterminant modulo q.

III - Topologie

On se place pour la suite de cette sous-section dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit E d'une norme $\|.\|$ et on note $|||.|||$ la norme subordonnée associée. p. 159

Proposition 52. L'espace $(\mathcal{L}(E), |||.|||)$ des applications continues de E dans E est une algèbre de Banach.

Théorème 53. $\mathrm{GL}(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$ et l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}(E)$.

Proposition 54. (i) $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact (et connexe). [C-G] p. 62

(ii) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (non-connexe).

Proposition 55. Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. p. 379

Proposition 56. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ est connexe. p. 401

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries **[C-G]**

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/.

Leçons pour l'agrégation de mathématiques **[D-L]**

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Cours d'algèbre **[PER]**

Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre. pour l'agrégation*. Ellipses, 15 fév. 1996.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/7778-18110-cours-d-algebre-agregation-9782729855529.html.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.

Théorie des groupes **[ULM21]**

Felix ULMER. *Théorie des groupes. Cours et exercices*. 2e éd. Ellipses, 3 août 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13760-25304-theorie-des-groupes-2e-edition-9782340057241.html.