

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

I - Nombres complexes de module 1

1. Le groupe \mathbb{U}

Définition 1. On définit

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

le groupe abélien des nombres complexes de module 1.

[ROM21]
p. 36

Proposition 2. L'application

$$\exp(i\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(où \exp est définie dans la sous-section suivante) définit un isomorphisme de \mathbb{U} dans $\text{SO}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 3. Un sous-groupe additif de \mathbb{R} est soit dense dans \mathbb{R} , soit de la forme $n\mathbb{Z}$.

[FGN3]
p. 51

Corollaire 4. Un sous-groupe de \mathbb{U} est soit fini, soit dense dans \mathbb{U} .

Corollaire 5. Soit $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$. $\{e^{in\theta} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{U} .

Application 6. $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Proposition 7. \mathbb{U} est un sous-groupe compact et connexe de \mathbb{C}^* .

[GOU20]
p. 44

Application 8. Soit $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors il existe deux points diamétralement opposés de \mathbb{U} qui ont la même image par f .

2. L'exponentielle complexe

Définition 9. On définit la fonction **exponentielle complexe** pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

on note cette somme e^z ou parfois $\exp(z)$.

[QUE]
p. 4

Remarque 10. Cette somme est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ d'après le critère de d'Alembert.

Proposition 11. (i) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

(ii) \exp est holomorphe sur \mathbb{C} , de dérivée elle-même.

(iii) \exp ne s'annule jamais.

Proposition 12. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{it}$ est un morphisme surjectif de \mathbb{R} sur \mathbb{U} .

Proposition 13. En reprenant les notations précédentes, $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe fermé de \mathbb{R} , de la forme $\text{Ker}(\varphi) = a\mathbb{Z}$. On note $a = 2\pi$.

3. Trigonométrie

Définition 14. Les fonctions \sin et \cos sont définies sur \mathbb{R} par

$$\text{— } \cos(t) = \text{Re}(e^{it}) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\text{— } \sin(t) = \text{Im}(e^{it}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Proposition 15. Ces fonctions sont réelles, 2π -périodiques, et admettent un développement en série entière de rayon de convergence infini. On peut en particulier les prolonger sur le plan complexe entier.

Proposition 16. Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$z = |z|e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

[R-R]
p. 259

Proposition 17 (Formule de Moivre).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Application 18 (Calcul du noyau de Dirichlet).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \sum_{k=-n}^n \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

[GOU20]
p. 271

II - Le groupe des racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Racines n -ièmes de l'unité

Définition 19. Étant donné $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle :

- **Racine n -ième de α** tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = \alpha$.
- **Racine n -ième de l'unité** toute racine n -ième de 1. On note μ_n cet ensemble.

[R-R]
p. 259

Exemple 20. Les racines cubiques de l'unité sont $1, j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et \bar{j} .

Proposition 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a n racines n -ièmes de l'unité, données par

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

où k parcourt les entiers de 0 à $n-1$.

Corollaire 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

Corollaire 23. Tout nombre complexe non nul α écrit $\alpha = r e^{i\theta}$ admet exactement n racines n -ièmes données par

$$\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

où k parcourt les entiers de 0 à $n-1$.

[GOZ]
p. 67

Proposition 24. μ_n est un groupe, et l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\rightarrow \mu_n \\ k &\rightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Proposition 25. \mathbb{C}^* admet exactement un sous-groupe d'ordre n : μ_n .

[ROM21]
p. 36

2. Générateurs et polynômes cyclotomiques

Définition 26. L'ensemble des générateurs de μ_n , noté μ_n^* , est formé des **racines primitives n -ièmes de l'unité**.

[GOZ]
p. 67

Proposition 27. (i) $\mu_n^* = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \text{pgcd}(k, n) = 1\}$.
(ii) $|\mu_n^*| = \varphi(n)$, où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

Définition 28. On appelle **n -ième polynôme cyclotomique** le polynôme

$$\Phi_n = \prod_{\xi \in \mu_n^*} (X - \xi)$$

Théorème 29. (i) $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$.
(ii) $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.
(iii) Φ_n est irréductible sur \mathbb{Q} .

Corollaire 30. Le polynôme minimal sur \mathbb{Q} de tout élément ξ de μ_n^* est Φ_n . En particulier,

$$[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$$

Application 31 (Théorème de Wedderburn). Tout corps fini est commutatif.

Application 32 (Dirichlet faible). Pour tout entier n , il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo n .

[GOU21]
p. 99

[DEV]

III - Applications en algèbre

1. Une application géométrique

Proposition 33 (Déterminant circulant). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

p. 153

Application 34 (Suite de polygones). Soit P_0 un polygone dont les sommets sont $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$. On définit la suite de polygones (P_k) par récurrence en disant que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k .

Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P_0 .

[I-P]
p. 389

2. Racines de polynômes

Théorème 35 (Kronecker). Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que toutes ses racines complexes appartiennent au disque unité épointé en l'origine (que l'on note D). Alors toutes ses racines sont des racines de l'unité.

Corollaire 36. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible sur \mathbb{Q} tel que toutes ses racines complexes soient de module inférieur ou égal à 1. Alors $P = X$ ou P est un polynôme cyclotomique.

p. 279

3. Dual d'un groupe

Soit G un groupe fini de cardinal n .

Définition 37. Un **caractère** est un morphisme de G dans \mathbb{C}^* . On note \widehat{G} l'ensemble des caractères, qu'on appelle **dual** de G .

Proposition 38. \widehat{G} est un groupe pour la multiplication.

[PEY]
p. 2

[DEV]

Proposition 39. (i) \widehat{G} est constitué des morphismes de G dans μ_n .

(ii) $\forall g \in G, |\chi(g)| = 1.$

(iii) $\forall g \in G, \chi(g^{-1}) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}.$

Proposition 40. Si $G = \langle g_0 \rangle$, en notant ω une racine primitive n -ième de l'unité, les éléments de \widehat{G} sont de la forme $g_0^k \mapsto (\omega^j)^k$ pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Corollaire 41. Si G est cyclique, $G \cong \widehat{G}$.

4. Transformée de Fourier discrète

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

p. 64

Notation 42. Soit f un vecteur de \mathbb{C}^N . On note $f[k]$ sa k -ième composante pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Définition 43. Soit f un vecteur de \mathbb{C}^N . La **transformée de Fourier discrète** de f est

$$\widehat{f} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \omega_N^{-nk}$$

pour $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ où l'on a noté $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ une racine primitive N -ième de l'unité. On note

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^N & \rightarrow & \mathbb{C}^N \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

Proposition 44 (Transformée de Fourier inverse).

$$\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}[k] \omega_N^{nk}$$

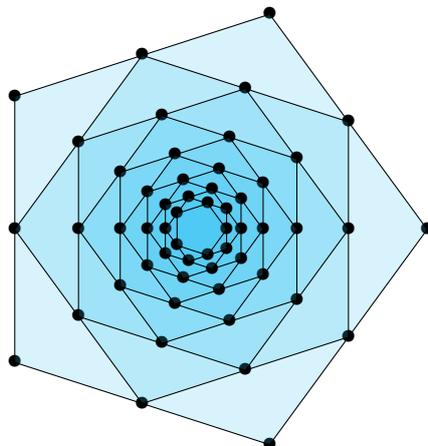
Corollaire 45. Soit f un vecteur de \mathbb{C}^N . En notant f_1 le vecteur défini par

$$f_1[0] = \frac{1}{N} f[0] \text{ et } \forall n \in \llbracket 1, \dots, N-1 \rrbracket, f_1[n] = \frac{1}{N} f[N-n]$$

on a

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \mathcal{F}(f_1)$$

Annexes



[I-P]
p. 389

FIGURE 1 – La suite de polygones.

Bibliographie

Oraux X-ENS Mathématiques

[FGN3]

Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 3.* 3^e éd. Cassini, 27 mai 2020.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/103-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-3.html>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

Théorie de Galois

[GOZ]

Ivan GOZARD. *Théorie de Galois. Niveau L3-M1.* 2^e éd. Ellipses, 1^{er} avr. 2009.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4897-15223-theorie-de-galois-niveau-l3-m1-2e-edition-9782729842772.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

LUCAS ISENMANN et TIMOTHÉE PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

L'algèbre discrète de la transformée de Fourier

[PEY]

Gabriel PEYRÉ. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier. Niveau M1.* Ellipses, 15 jan. 2004.

<https://adtf-livre.github.io>.

Analyse complexe et applications

[QUE]

Martine QUEFFÉLLEC et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage.* Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/>.

Formulaire de maths

[R-R]

Olivier RODOT et Jean-Étienne ROMBALDI. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours*. De Boeck Supérieur, 30 août 2022.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths>.

Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.