Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équation

1 Suites récurrentes

Définition 1 (GOU 200)**.** Soient (E, d) un espace métrique et h un entier naturel non nul. Une suite $(u_n)_n$ à valeur dans E est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire $u_n = f(u_{n-1}, ..., u_{n-h})$, $\forall n \geq h$, où f est une application de E^h dans E.

Exemple 2 (ELA 4, TL1 550)**.** Les nombres de Fibonacci sont les termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

1.1 Suite récurrente réelle d'ordre 1

[ELA 38] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_n$ une suite réelle définie par la donnée de u_0 et la relation de récurennce $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \to \mathbb{R}$ est continue.

Théorème 3 (ELA 38)**.** [caractérisation séquentielle de la continuité] Soient $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue au point ℓ si et seulement si, quelle que soit la suite $(u_n)_n$ d'éléments de I convergeant vers ℓ, la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(l)$.

Corollaire 4 (ELA 38)**.** Si la suite (u_n) d'éléments de I converge vers ℓ, $\ell \in I$, alors nécessairement $\ell = f(\ell)$, i.e. ℓ est point fixe.

Exemple 5 (ELA 38)**.** Considérons $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$. On a $f(x) = x^2 - x - 3$ et cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. La limite éventuelle ℓ vérifie donc $\ell = \ell^2 - \ell - 3$. On sait alors que si $(u_n)_n$ converge, sa limite est nécessairement 3 ou -1.

Supposons désormais qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, u_n \in I$.

Proposition 6 (ELA 38)**.** Si f est croissante sur I, alors $(u_n)_{n\leq N}$ est monotone.

Proposition 7. Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\geq Ent(N/2)+1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq Ent(N-1/2)+1}$ sont monotones de sens de variation opposés.

Exemple 8 (GOU 203)**.** Considérons $(u_n)_n$ définie par $0 \leq u_0 < 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}$. Par une étude de fonction ou par lecture graphique (cf annexe 1), on a que :

1. Si $u_0 \in [0, 1]$, (u_n) croit vers 1
2. $u_0 = 1$ ou $u_0 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $(u_n)_n$ est stationnaire en cette valeur.
3. Si $u_0 \in]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}[$, $(u_n)_n$ décroit vers 1
4. Si $u_0 > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $(u_n)_n$ n'est pas définie à partir d'un certain rang.

Proposition 9 (BER 145)**.** [DEV 1] Soient $b > 0$ et $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ continue, croissante telle que :

1. $f(0) = 0$ et $f(x) < x, \forall x \in]0, b]$
2. $\exists \lambda > 0, \exists r > 1, f(x) = x - \lambda x^r + o_{x\to 0}(x^r)$

. On pose, pour tout $c \in]0, b[$, la suite définie par $u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, $(u_n)_n$ est à valeur dans $]0, b[$, tend vers 0 et $u_n \sim_{n\to\infty} (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$.

Définition 10 (TL1 531)**.** Soit $r \in \mathbb{K}$. On appelle suite arithmétique de raison r toute suite $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 11 (TL1 531)**.** Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de premier terme a et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = a + nr$.

Définition 12 (TL1 532)**.** Soit $r \in \mathbb{K}$. On appelle suite géométrique de raison r toute suite $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = ru_n$.

Proposition 13 (TL1 533)**.** Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme a et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = ar^n$.

Définition 14 (GOU 201)**.** Soit $a, q \in \mathbb{K}$. On appelle suite arithmético géométrique de paramètres a, q toute suite $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + a$.

Proposition 15 (GOU 201)**.** Si $(u_n)_n$ est une suite arithmético géométrique telle que $q \neq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q.(u_0 - r) + r$ où $r = \frac{a}{1-q}$

1.2 Suites récurrentes linéaires

Mentionner oral on voit plus gros que réelle pour les démo, mais au vu du titre on se ramènera à l'utilisation pour des suites réelles

Définition 16 (GOU 202)**.** On dit qu'une suite $(u_n)_n$ à valeurs complexes vérifie une récurrence linéaire d'ordre h à coefficients constants si

$$\forall n \leq h, u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + .. + a_h u_{n-h} = 0(*)$$

où $a_1, ..., a_h \in \mathbb{C}$. L'équation $x^h - a_1 x^{h-1} - ... - a_h = 0$ s'appelle équation caractéristique de la récurrence $(*)$.

Proposition 17 (GOU 202 MANQUE DEMO)**.** Reprenons les notations de la définition précédente. Si on note $r_1, .., r_q$ les racines de l'équation caractéristique et $\alpha_1, ..., \alpha_q$ leur ordre de multiplicité respectifs, alors l'ensemble des suites (u_n) vérifient $(*)$ est l'ensemble des suites de la forme $u_n = P_1(n) r_1^n + ... + P_q(n) r_q^n$ où pour tout i, P_i est un polynôme vérifiant $deg(P_i) < \alpha_i$

Proposition 18 (GOU 202, cas le plus fréquent)**.** Soit $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := au_{n-1} + bu_{n-2}$. L'équation caractérisitque est alors $x^2 - ax - b = 0(E)$. La proposition précédente se reformule :

1. Si (E) admet deux racines $x_1 \neq x_2$, alors $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Si (E) possède une racine double x, $u_n = (\lambda n + \mu) x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Dans tous les cas λ, μ sont déterminés à partir de u_0 et u_1.

Exemple 19 (TL1 551)**.** On peut illustrer cette proposition avec la suite de l'exemple 2. L'équation caractéristique de cette suite est $x^2 - x - 1 = 0$ qui a pour racine $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Les valeurs de $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ donnent $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} = -\mu$ donc $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$

1.3 Suites vectorielles

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$. On s'intéresse aux suites récurrentes de la forme $X_{n+1} = AX_n$.

Proposition 20 (TL1 785)**.** $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

Proposition 21 (DEV bonus)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ a_n & a_1 & . & . & . & a_{n-1} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ a_2 & a_3 & . & . & . & a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice circulante. Posons $P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_k X^{k-1}$. Alors $det(A) = \prod_{j=1}^{n} P(w^j)$ où $w = e^{2i\pi/n}$.

Application 22 (DEV bonus)**.** Soit P un polygone du plan complexe à n côtés. Notons $(z_1, ..z_n) \in \mathbb{C}^n$ les affixes des sommets de P. On définit alors pas récurrence une suite de polygones $(P_k)_k$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arrêtes de P_k. Alors $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P. (cf annexe 2).

Méthode 23 (No ref)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente linéaire d'ordre k de relation de récurence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = a_{k-1} u_{n+k-1} + ... + a_0 u_n$.

On pose alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & & \dots & a_{k-1} \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \dots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De cette manière, expliciter $(u_n)_n$ est équivalent à expliciter $(X_n)_n$ et on se ramène donc à un problème de suite d'ordre 1.

Exemple 24 (TL1 788)**.** Considérons la suite définie pas $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$. On peut réécrire cette relation par : $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$ Par étude de matrice, on trouve que $u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

2 Étude des points fixes

Proposition 25 (TL1 563)**.** [théorème du point fixe] Soient I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ est contractante, alors il existe un unique $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$. De plus, pour tout $u_0 \in I$, la suite récurrente $(u_n)_n$, définie par u_0 et f, converge vers ℓ.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

Définition 26 (TL1 564)**.** Soit $\ell \in I$ un point fixe de f.
On dit que ℓ est attractif (resp. super attractif) si $|f'(\ell)| < 1$ (resp $f'(\ell) = 0$) et que ℓ est répulsif si $|f'(\ell)| > 1$.

Exemple 27 (TL1 564)**.** Regardons le cas d'une suite arithmético-géométrique définie par $f(x) = ax + b$ où $a \neq 1$. Le seul point fixe de cette fonction est $\ell = \frac{b}{1-a}$. On a de plus $f'(\ell) = a$. Le point ℓ est donc attractif si $|a| < 1$ et répulsif si $|a| > 1$

Proposition 28 (TL1 564)**.** Soit $\ell \in I$ un point fixe de f et supposons f à dérivée continue.

1. Si ℓ est attractif, il existe $0 < k < 1$ et un segment $J \subset I$ de centre ℓ non réduit à un point tel que : $\forall x \in J, |f'(x)| \leq k < 1$. Dans ce cas $f(J) \subset J$ et pour tout u_0, la suite récurrente définie par $u_0 \in J$ et f est bien définie et admet ℓ pour limite.
2. Si ℓ est répulsif et $u_0 \in I$ telle que la suite récurrente définie par $u_0 \in J$ et f soit bien définie, on a admet ℓ pour limite ; alors si u_n converge vers ℓ, elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemple 29 (TL1 565)**.** L'application $f : x \mapsto 4x - x^2$ vérifie $f([0,4]) \subset [0,4]$. De plus les points fixes de f sont 0 et 3. On a $f'(x) = -2x + 4$ donc $f'(0) = 4$ et $f'(3) = -2$. On en déduit que ces points sont répulsifs. Ainsi si $(u_n)_n$ est une suite récurrente définie par $u_0 \in [0,4]$ et f qui converge, elle est constante égale à 0 ou 3 à partir d'un certain rang.

3 Applications à la résolution approchée d'équations

3.1 Recherche des zéros d'une fonction

Proposition 30 (un peu TL1 559)**.** [Méthode de Héron] Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$. En prenant $u_0 > \sqrt{a}$ et en définissant et en définissant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient une suite récurrente décroissante qui converge vers $\sqrt{a}$.

Exemple 31 (TL1 559)**.** Pour $a = 2$, la 8-ème itération de cette méthode, donne 196 décimales exactes de $\sqrt{2}$. On donne une illustration de la méthode à l'annexe 4.

Théorème 32 (ROU 144, TL2 980)**.** [méthode de Newton, DEV 2] Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour tout $n \leq 0$. Alors, f a un unique zéro a et on a :

1. $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$converge vers a de manière quadratique.
2. Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$, alors pour tout $x_0 \in]a,d]$, $(x_n)_n$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim_{n\to\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

(cf annexe 3).

Remarque 33 (TL1 560)**.** La méthode d'Héron est enfaite un cas particulier de la méthode de Newton avec la fonction $g(x) := x^2 - 2$. En effet $g'(x) = 2x$, donc $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ (cf Annexe 1).

La méthode de Newton est bien plus efficace que la méthode de la sécante, mais son implémentation nécessite le calcul de f'. Si pas expression de f' on a autre méthode

Théorème 34 (TL2 979/ 981, Voir les démos)**.** [Méthode de la sécantes] Soit $[a, b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$ et que f' et f'' sont strictement positifs sur $[a, b]$. Soit $x_0 = a$, $x_1 = b$ et $x_{n+1} = \frac{x_n f(b) - b f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite converge linéairement vers ℓ qui est point fixe de f. De plus, l'erreur à chaque étapre est majorée par : $|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2m}|x_{n+1} - x_n||b - x_n|$, où $M = \max\limits_{[a,b]} |f''|$ et $m = \min\limits_{[a,b]} |f'|$. (cf Annexe 5)

3.2 Résolution d'un système linéaire

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système $Ax = B$.

Méthode 35 (TL1 1021)**.** On va écrire A sous la fomre $M - N$ où M est une matrice inversible et "simple" à inverser. On posera alors $P = M^{-1}N$ et $C = M^{-1}B$. On se ramène alors à résoudre $X = PX + C$.

Théorème 36. Soit $P \in Gl_n(\mathbb{R})$. LASSE :

1. La suite définie par $X_0 = 0$ et $X_{k+1} = PX_k + C$ converge quel que soit le vecteur $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. $\lim\limits_{k \to \infty} P^k = 0$
3. Le rayon spectral de P vérifie $\rho(P) < 1$
4. Il existe une norme matricielle subordonée telle que $\|P\| < 1$.

Dans l'un de ces cas, la matrice $(I_n - P)$ est inversible et la limite de la suite $(X_k)_k$ est $(I_n - P)^{-1}C$.

Définition 37. $D := \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{2,2} & & \\ & & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $E := \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{2,1} & 0 & & \\ & & ... & 0 \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$, $F := \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ 0 & 0 & & \\ & & ... & a_{n-1,n} \\ 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Méthode 38 (TL1 1022)**.** [Jacobi, Gauss Seidel] Si tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls on peut considérer les deux méthodes suivantes :

1. la méthode de Jacobi qui consite à prendre $M := D$ et $N = E + F$.
2. la méthode de Gauss Seidel où $M := D - E$ et $N := F$

Savoir : même coup en temps d'itération ($O(n^2)$) mais 2e moins de stockage de vecteurs.