Leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Les fonctions considérées dans ce cours sont des fonctions réelles. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1 Prérequis

Soient f, g deux fonctions définies sur D un voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut-être en a).

Définition 1 (TL1 861)**.** On dit que f et g sont équivalentes en a si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note $f \sim_a g$.

Proposition 2 (TL1 862)**.** Supposons $f \sim_a g$. Si g admet une limite ℓ au point a, alors f admet également la limite ℓ au point a.

Définition 3 (TL1 867)**.** On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note $f = o_a(g)$.

Définition 4 (TL1 869, Pas besoin ?)**.** On dit que f est dominée par g au voisinage de a si f/g est bornée au voisinage de a. On note $f = O_a(g)$.

Définition 5 (DAN 124 ou 136)**.** On dit que f admet un développement asymptotique en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ s'il existe un entier naturel n et $(n+1)$ applications $f_0, .., f_n$ définies sur D_f vérifiant

1. $f_{k+1} = o_a(f_k), \forall k \in \{0, 1, .., n-1\}$
2. $f = f_0 + f_1 + ... + f_n + o_a(f_n)$

2 Développement limité

2.1 Introduction

Définition 6 (TL1 871)**.** On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au point a s'il existe u polynôme P de degré au plus n tel que $f(x) = P(x) + o_a(x-a)^n$ au voisinage de a.
P est appelée la partie régulière du développement limité.

Notation 7. On notera admet un $DL_n(a)$ pour "admet un développement limite à l'ordre n au voisinage de a".

Proposition et définition 8 (TL1 871)**.** On peut réécrire cette égalité comme combinaison linéaire de puissance de $(x-a)$: $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + .. + \alpha_n(x-a)^n + o_a((x-a)^n)$.
Les coefficients α_k sont alors appelés les coefficients du développement limité.

Théorème 9 (TL1 871)**.** Si f admet un $DL_n(a)$ de la forme $f(x) = \alpha_k(x-a)^k + ... + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors elle est équivalente à $\alpha_k(x-a)^k$ en a.

Corollaire 10 (TL1 871)**.** Si f admet un $DL_n(a)$, alors il est unique.

Méthode 11. Pour chercher la limite en a d'une fonction f, ou plus généralement un équivalent en a de f de la forme $\alpha(x-a)^p$, on peut se ramener à chercher un $DL(a)$ de f dont la partie régulière est non nulle.

Exemple 12 (TL1 875)**.** On déduit de $\frac{1}{1-x} - \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$

que le $DL_n(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

revoir argument TL1, piège

2.2 Calcul de DL

Proposition 13 (TL1 869)**.** [Formule de Taylor Young] Supposons f n fois continûment dérivable sur un intervalle I. Alors, pour tout point $a \in I$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Corollaire 14 (TL1 873)**.** [corollaire Taylor Young ?] Supposons f n fois continûment dérivable sur un intervalle I. Alors pour tout point $a \in I$, f a un développement limité d'ordre n au point a, dont les coefficients sont $\alpha_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Savoir réciproque fausse + cex TL2p 874

Exemple 15 (TL 1 875)**.** On a par exemple les $DL_n(0)$:

1. $exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

Proposition 16 (TL1 881, supp - et ajouter en mult scalaire dans 1)**.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions admettant un $DL_n(a)$: $f(x) = P(x-a) + o_a(x-a)^n$ et $g(x) = Q(x-a) + o_a(x-a)^n$. Alors :

1. $\lambda f + g$ admet un $DL_n(a)$ donnée par $(\lambda f + g)(x) = \lambda P(x-a) + Q(x-a) + o(x-a)^n$
2. fg admet un $Dl_n(a)$ donnée par $(fg)(x) = R(x-a) + o(x-a)^n$, où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans le produit PQ que les termes de degré au plus égal à n en $(x-a)$.

Exemple 17 (TL1 872, demande DL fonctions usuelles)**.** Cherchons à exprimer $e^x - 2\cos(x)$ au voisinage de 0 :

$$e^x - 2\cos(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 2(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))$$

Proposition 18 (TL1 882)**.** Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$ tel que f admet un $DL_n(a)$ de la forme $f(x) = P(x-a) + o(x-a)^n$ de coefficients α_k. Alors toute primitive F de f a un $DL_n(a)$ de la forme : $F(x) = F(a) + \alpha_0(x-a) + ... + \alpha_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o(x-a)^{n+1}$.

Exemple 19 (TL1 882)**.** Grâce à la formule de Taylor-Young on trouve que le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$ est $1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$. Une primitive de cette fonction est $\arctan(x)$ dont on déduit donc le $DL_n(0)$ donnée par : $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$.
Par la même méthode, on trouve le $DL_n(0)$ de $ln(1+x)$ (cf annexe).

Proposition 20 (TL1 890, cf GOU 90, mieux dit)**.** Soit f une fonction admettant le $DL_n(a)$: $f(x) = P(x-a) + o_a(x-a)^n$. Soit g une fonction ayant un $DL_n(f(a))$: $g(y) = Q(y - f(a)) + o_b(y - f(a))^n$.
Alors $g \circ f$ admet un $DL_n(a)$ de la forme $g \circ f(x) = R(x-a) + o_a(x-a)^n$, où $R(x-a)$ est le polynôme (en (x-a)) obtenu en ne gardant dans $Q(P(x-a) - f(a))$ que les monômes $c_p(x-a)^p$ de degré p au plus égale à n.

2.3 Utilisation des DL

Remarque 21 (TL1 891)**.** Le principal problème en pratique est de de trouver à quel ordre il faut calculer les DL : un ordre trop bas ne permettra pas de conclure, mais un ordre trop élevé entrainera des calculs inutiles.

Exemple 22 (TL1 891)**.** Soit $f(x) := \frac{2(1-\cos x)\sin x - x^3(1-x^2)^{1/4}}{\sin^5 x - x^5}$. On cherche à déterminer la limite de cette fonction quand x tend vers 0.
Le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0, on obtient donc une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.
Intéressons nous d'abord au dénominateur et l'on notera $\psi(x) := \sin^5 x - x^5$. On a $\psi(x) = x^5((\frac{\sin x}{x})^5 - 1)$ et par DL de sin à l'ordre 2 on trouve

$\varphi(x) = x^5((1-\frac{x^2}{6})^5 - 1 + o(x^2)) = x^5(-\frac{5x^2}{6}) + o(x^7)$.
On cherche alors un DL à l'ordre 7 du numérateur que l'on réécrit $\varphi(x) := 2(1-\cos x)\sin x - x^3(1-x^2)^{1/4}$. Si $x \neq 0$, $\varphi(x) = x^3(\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\frac{\sin x}{x} - (1-x^2)^{1/4})$. On cherche alors les DL à l'ordre 4 de $\frac{2(1-\cos x)}{x^2}$, $\frac{\sin x}{x}$ et $(1-x^2)^{1/4})$ et on obtient : $\varphi(x) = (\frac{1}{40}+\frac{3}{32})x^7 + o(x^7)$.
Finalment $f \sim_0 \frac{(\frac{1}{40}+\frac{3}{32})x^7}{-\frac{5x^7}{6}} = -\frac{57}{400}$ qui est donc la limite de f en 0.

Exemple 23 (No ref)**.** On peut de même calculer la limite de $(1+\frac{1}{n})^n$. Lorsque n tend vers l'infini $\frac{1}{n}$ tend vers 0. En réécrivant $(1+\frac{1}{n})^n = \exp(n\ln(1+\frac{1}{n}))$ on peut utiliser le $DL_1(0)$ de $\ln(1+x)$ et on obtient $(1+\frac{1}{n})^n = \exp(n(\frac{1}{n})+o(n)) = exp(1+o(1))$. On en conclut que $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e^1$. Regarder DAN 151

3 Développement asymptotique de suites

3.1 Suites numériques

Exemple 24 (DAN 152)**.** Considérons la suite $(u_n := 2^n\sin(\frac{\pi}{2^n}))_n$. Le $DL_3(0)$ de sin nous permet d'obtenir un développement asymptotique de cette suite : $u_n = 2^n(\frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi^3}{6.2^{3n}} + o(\frac{1}{2^{3n}})) = \pi - \frac{\pi^3}{6.2^{2n}} + o(\frac{1}{2^{2n}})$.

Exemple 25 (DAN 153)**.** On peut exploiter le résultat de l'exemple précédent pour approximer π mais cela demande un peut de travail étant donner que, pour l'instant, les termes de $(u_n)_n$ dépendent eux-mêmes de π.
Considérons la suite définie par $c_n := \cos(\frac{\pi}{2^n})$. Par les formules trigonométriques on peut réécrire $c_n = 2c_{n+1}^2 - 1$ et $u_n = u_{n+1}c_{n+1}$. On a donc, pour tout $n \geq 1$, $c_{n+1} = \sqrt{\frac{c_n+1}{2}}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{c_{n+1}}$. En considérant $c_1 = 0$ et $u_0 = 2$, on peut calculer les termes de la suite $(u_n)_n$.
$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b)+\sin(a+b))$

Théorème 26 (ROU 144, TL2 983)**.** [méthode de Newton, DEV 1] Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour tout $n \leq 0$. Alors, f a un unique zéro a et on a :

1. $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge vers a de manière quadratique.
2. Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$, alors pour tout $x_0 \in]a,d]$, $(x_n)_n$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim_{n\to\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n-a)^2$.

(cf annexe 2).

Exemple 27 (TL1 560)**.** [Algorithme de Babylone] En considérant $f(x) = x^2 - 2$, cette méthode permet d'approché $\sqrt{2}$.

si time ex7 GOU 207 ou DAN p 263

3.2 Série numériques

Théorème 28 (TL1 722)**.** Soient $\sum a_n$ et $\sum a'_n$ deux séries à termes réeels strictement positifs. On suppose $a_n \sim_{+\infty} a'_n$. Alors :

1. Les deux séries sont de même nature
2. Si les deux séries convergent, alors leur reste sont équivalents : $R_n \sim_{+\infty} R'_n$
3. Si les deux séries divergent, alors leur somme partielle sont équivalentes : $S_n \sim_{n\to\infty} S'_n$

Exemple 29 (GOU 211)**.** On définit $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On peut tout d'abord montrer que $H_n \sim_{+\infty} \log(n)$. Puis en posant $U_n = H_n - \log(n)$, on a $U_n - U_{n+1} \sim_{+\infty} -\frac{1}{2n^2}$. Donc par notre théorème, $\sum U_n - U_{n-1}$ est une série convergente, ce qui implique que $(U_n)_n$ converge vers une limite γ (cette limite est appelée constante d'Euler). On a alors $H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(1)$.
Par une comparaison limite intégral, on peut affiner ce résultat et obtenir $H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{2n})$.

Proposition 30 (BER 145)**.** [DEV 2] Soient $b > 0$ et $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ continue, croissante telle que :

1. $f(0) = 0$ et $f(x) < x, \forall x \in]0,b]$
2. $\exists \lambda > 0, \exists r > 1, f(x) = x - \lambda x^r + o_{x\to 0}(x^r)$

. On pose, pour tout $c \in]0, b[$, la suite définie par $u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, $(u_n)_n$ est à valeur dans $]0, b[$, tend vers 0 et $u_n \sim_{n\to\infty} (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$.

Application 31 (BERNIS)**.** En particulier, pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$, on a le développement assymptotique $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o(\frac{\ln(n)}{n^2})$.