Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Dans cette leçon $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1 Convergence de suite numérique

1.1 Cas général

Définition 1 (TL1 522)**.** Une suite numérique est une application $u : \mathbb{N} \to E$. On note également cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore (u_n) avec $u_n := u(n)$.

Définition 2 (ELA 12, TL 1 524 ; 562 mieux)**.** On dit que $(u_n)_n$ est bornée si il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Définition 3 (ELA 12, TL1 541)**.** On dit que (u_n) admet $\ell \in \mathbb{K}$ comme limite si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Proposition 4 (ELA 12, TL1 541, reformulé)**.** Si $(u_n)_n$converge, sa limite est unique.

Définition 5 (ELA 13, TL1 542)**.** On dit qu'une suite (u_n) est convergente si elle admet une limite. Dans le cas contraire, on dit que la suite est divergente.

Notation 6. On note la limite $\lim u_n$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exemple 7 (TL1 542)**.** $(u_n := (-1)^n)$ est une suite divergente. En effet, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, $|1 - \ell|$ ou $|-1-\ell|$ est strictement supérireur à $1/2$. Donc $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \frac{1}{2}$.

Proposition 8 (ELA 13, TL1 544)**.** Toute suite convergente est bornée.

Proposition 9 (ELA 16)**.** Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes vers ℓ et ℓ' respectivement. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda\ell + \ell'$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = \ell\ell'$.

Théorème 10 (TL1 542)**.** [Moyenne de césaro] Posons $v_0 := u_0$ et pour tout $n > 0$, $v_n := \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$. On définit ainsi une suite (v_n) de $\mathbb{K}$, appelée moyenne de Césaro de (u_n). Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors $(v_n)_n$ converge également vers ℓ.

Contre-exemple 11 (TL1 543)**.** Reprenons la suite de l'exemple 7. La suite moyenne de Césaro associée vaut 0 lorsque n est pair et $-\frac{1}{n}$ si n est impair. On remarque bien que cette suite (v_n) converge vers 0, cependant, ce n'est pas le cas de notre suite u_n qui est divergente. Ceci fournit un contre exemple à la réciproque du théorème si dessus.

1.2 Cas des suites réelles

Considérons $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de nombres réels.

Définition 12 (ELA 20)**.** On dit que $(u_n)_n$

1. tend vers $+\infty$ si : $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$
2. tend vers $-\infty$ si : $\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq B$

On note respectivement $\lim\limits_{n\to\infty} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} = -\infty$

Proposition 13 (TL1 555, ELA 19)**.**
1. Si (u_n) convergente et $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
2. Si (u_n) et (v_n) convergente et $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Théorème 14 (TL1 555)**.** [des gendarmes] Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes admettant la même limite ℓ. Si (u_n) vérifie $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang, alors (u_n) est convergente et admet ℓ pour limite.

Définition 15 (ELA 12)**.** Si $(u_n)_n$ est à valeurs réelles, on dit qu'elle est

1. majorée s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq A$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2. minorée s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $B \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Définition 16 (TL1 556)**.** On dit qu'une suite réelle (x_n) est croissante (resp. décroissante) si $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$), pour tout n.

Théorème 17 (TL1 556)**.**

Une suite réelle croissante converge si et seulement si elle est majorée.

Une suite réelle décroissante converge si et seulement si elle est minorée.

Définition 18 (TL1 560)**.** On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles vérifient les propriétés suivantes :

1. (u_n) est croissante
2. (v_n) est décroissante
3. la suite $(v_n - u_n)$ tend vers zéro.

Théorème 19 (TL1 560)**.** Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite

Exemple 20 (TL1 560)**.** Prenons (u_n) et (v_n) les suites définit en considérant respectivement les approximations décimales par défaut et par excés de π. C'est à dire $u_0 = 3$, $u_1 = 3.1$, $u_2 = 3.14$, etc ; et $v_0 = 4$, $v_1 = 3.2$, $v_2 = 3.15$, etc. Ces suites sont adjacentes et convergent vers π.

1.3 Sous-suite

Définition 21 (TL1 523)**.** Une suite extraite, ou sous-suite, d'une suite (u_n) est de la forme $(v_k := u_{n_k})$ où (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers naturels. On note aussi $(u_{\varphi(k)})$ la suite extraite, où φ est l'application qui à k associe n_k.

Proposition 22 (TL1 545)**.** Si une suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors toutes ses sous-suites convergent également vers ℓ.

Exemple 23 (TL1 545)**.** Cette proposition fournit une autre preuve de la divergence de $(-1)^n$ étant donné que $(u_{2n})_n$ converge vers 1 tandis que (u_{2n+1}) converge vers -1

Proposition 24 (TL1 562)**.** [Bolzano Weierstass] Toute suite numérique bornée (x_n) contient une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.

2 Valeurs d'adhérence

2.1 Introduction des valeurs d'adhérence

Définition 25 (TL1 563, changer x en u pour + cohérent)**.** On dit que (u_n) admet $a \in \mathbb{K}$ comme valeur d'adhérence s'il existe une suite extraite qui converge vers a.

Exemple 26. En reprenant notre exemple fil rouge $((-1)^n)$, par l'exemple 23 cette suite admet 1 et -1 comme valeur d'adhérence.

Proposition 27 (No ref)**.** Une suite convergente admet une unique valheur d'adhérence.

Proposition 28 (TL1 563, ssi)**.** Soit (u_n) est bornée. $(u_n)_n$ admet une unique valeur d'adhérence a si et seulement si elle converge.

Contre-exemple 29 (TL1 563)**.** Considérons la suite $(u_n := n + (-1)^n n)$. Cette suite admet 0 comme unique valeur d'adhérence, cependant elle n'est pas convergente. Ceci montre l'importance de l'hypothèse bornée.

2.2 Limites inférieure et supérieure

Considérons, dans cette partie uniquement, $(u_n)_n$ une suite bornée

Définition 30 (DAN 77)**.**

1. La limite supérieure de $(u_n)_n$ est la limite : $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{p\to\infty} (\sup\limits_{n\geq p} u_n)$

2. La limite inférieure de $(u_n)_n$ est la limite : $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{p\to\infty}(\inf_{n\geq p} u_n)$

Proposition 31 (DAN 77). 1. Pour toute valeur d'adhérence l de (u_n), on a $\liminf_{n\to\infty} u_n \leq l \leq \limsup_{n\to\infty} u_n$

2. $(u_n)_n$ converge si et seulement si $\liminf_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} u_n$

3 Exemples classiques

3.1 Suites définies par une récurrence

Proposition 32 (Ca va vraiment là ça ? ?). Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en ℓ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_n$ de I convergente vers ℓ, on a $(f(u_n))_n$ qui converge vers $f(\ell)$.

Définition 33 (GOU 200). Soient (E, d) un espace métrique et h un entier naturel non nul. Une suite $(u_n)_n$ à valeur dans E est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire $u_n = f(u_{n-1}, ..., u_{n-h})$, $\forall n \geq h$, où f est une application de E^h dans E.

Exemple 34 (ELA 4, TL1 550). Les nombres de Fibonacci sont les termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

Proposition 35 (GOU 200). Soit (E, d) un espace métrique et $(u_n)_n$ une suite récurrente d'ordre $h \in \mathbb{N}^*$ définit par l'application $f : E^h \to E$. Si $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ et si l'application f est continue au point $(\ell, ..., \ell)$, alors on a $\ell = f(\ell, ..., \ell)$.

Proposition 36 (BER 145). [DEV 1] Soient $b > 0$ et $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ continue, croissante telle que :

1. $f(0) = 0$ et $f(x) < x, \forall x \in]0, b]$
2. $\exists\lambda > 0, \exists r > 1, f(x) = x - \lambda x^r + o_{x\to 0}(x^r)$

. On pose, pour tout $c \in]0, b[$, la suite définie par $u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, $(u_n)_n$ est à valeur dans $]0, b[$, tend vers 0 et $u_n \sim_{n\to\infty} (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$.

Application 37 (BERNIS DEV 1). En particulier, pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$, on a le développement assymptotique $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o(\frac{\ln(n)}{n^2})$.

Définition 38 (TL1 531). Soit $r \in \mathbb{K}$. On appelle suite arithmétique de raison r toute suite $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 39 (TL1 531). Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de premier terme a et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = a + nr$.

Définition 40 (TL1 532). Soit $r \in \mathbb{K}$. On appelle suite géométrique de raison r toute suite $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = ru_n$.

Proposition 41 (TL1 533). Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme a et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = ar^n$.

3.2 Suite de Cauchy

Définition 42 (TL2 496). Une suite $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si elle vérifie la condition : $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq N, d(u_n, u_p) \leq \varepsilon$

Proposition 43 (TL2 496). Toute suite convergente est de Cauchy.

Contre-exemple 44 (no ref, pour cex après). La suite $(1/n)_n$ est une suite de Cauchy dans $]0, +\infty[$, cependant elle ne converge pas dans cette ensemble. Ceci montre que la réciproque du théorème précédent est fausse.

Corollaire 45 (No ref). [A voir] Une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence converge.

3.3 Séries numériques

On considère $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E.

Définition 46 (GOU 208). On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\sum u_n$ cette série et on appelle somme partielle d'indice n le terme d'indice n de cette suite.

Définition 47 (GOU 208)**.** On dit que $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas la limite s'appelle la somme de la série et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'indice n l'élément R_n définie par $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Exemple 48 (GOU 209)**.**
1. Si $a \neq 0$, la série $\sum na$ a pour suite de sommes partielles $(\frac{n(n-1)}{2})_n$ et diverge donc.
2. Si $|q| < 1$, la série $\sum q^n$ a ses sommes partielles qui sont données par $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et est donc une série convergente.

Proposition 49 (GOU 209)**.** [Critère de Cauchy pour les séries] Une série $\sum u_n$ à valeur dans un espace de Banach converge si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \leq N, \forall p \in \mathbb{N}, \|u_n + ...u_{n+p}\| < \varepsilon$

Corollaire 50 (GOU 209, ELA 82)**.** Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Proposition 51 (GOU 209)**.** Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs converges si et seulement si la suite (S_n) est majorée.

Théorème 52 (GOU 209)**.** Considérons deux séries réelles $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

4 Approximation de réels

Proposition 53 (un peu TL1 559)**.** [Méthode de Héron] Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$. En prenant $u_0 > \sqrt{a}$ et en définissant et en définissant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient une suite récurrente décroissante qui converge vers $\sqrt{a}$.

Exemple 54 (TL1 559)**.** Pour $a = 2$, la 8-ème itération de cette méthode, donne 196 décimales exactes de $\sqrt{2}$. On donne une illustration de la méthode à l'annexe 1.

Théorème 55 (ROU 142)**.** [DEV2] Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour tout $n \leq 0$, et $x_0 \in [c,d]$. Alors, f a un unique zéro a et on a :

1. $\exists \alpha > 0, \forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, (x_n) converge vers a de manière quadratique.
2. Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$, alors pour tout $x_0 \in]a,d]$,$(x_n)_n$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim_{n\to\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

Remarque 56 (TL1 560)**.** La méthode d'Héron est enfaite un cas particulier de la méthode de Newton avec la fonction $g(x) := x^2 - 2$. En effet $g'(x) = 2x$, donc $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ (cf Annexe 1).