Leçon 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

1 Formule de Taylor

1.1 Cas de la variable réelle

Théorème 1 (TL1 652)**.** [Taylor-Lagrange, Global : comportement fonction sur voisinage] Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction n fois continûment dérivable sur un segment $[a,b]$ et dont la dérivée $(n+1)$ème existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Corollaire 2. Soient f une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, il existe $c_x \in I$ tel que :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

La partie $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ est un polynôme en x de degré au plus n que l'on appelle polynôme de Taylor ou polynôme d'approximation de f au point a à l'ordre n. L'autre partie est appelée le reste de Taylor.

Remarque 3. Le reste de Taylor mesure la différence entre la fonction f et le polynôme d'approximation. C'est l'écriture de ce reste qui diffère les formules de Lagrange

Théorème 4 (TL1 654)**.** [Inégalité de Taylor-Lagrange] Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle I dont la $(n+1)$ème dérivée est bornée par $M \geq 0$. Alors pour tout point $a \in I$, on a :

$$\forall x \in I |f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Application 5 (TL1 654)**.** Cette inégalité permet de donner majoration de l'erreur d'approximation.

Proposition 6 (TL1 869)**.** [Formule de Taylor Young, Locale : comportement fonction en un point] Supposons f n fois continûment dérivable sur un intervalle I. Alors, pour tout point $a \in I$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

HYpothèses peuvent être améliorer et juste n dérivable au point a mais démo plus dur

Application 7. Ce théorème nous permet de trouver des développements limités, utiles notamment pour la recherche de limite.

Exemple 8 (TL 1 855)**.** On peut par exemple chercher à approcher sin en 0 par un polynôme. En utilisant la formule de Taylor-Young aux ordres $1, 3, 5, 7, 9$, on peut comparer cette fonction aux polynômes : $P_1 := x; P_3 := x - \frac{x^3}{6}; P_5 := x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}; P_7 := x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}; P_9 := x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$. (cf annexe)

Théorème 9 (Taylor avec reste intégral)**.** [TL1 857] Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fontion $(n+1)$ fois continûment dérivable sur un intervalle I. Alors, pour tout point $a \in I$, on a : $\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

Remarque 10. Cette formule nous apporte plus d'informations sur le reste.

1.2 Cas des fonctions vectorielle

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Considérons $f : U \to \mathbb{R}^p$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $k \geq 1$.

Notation 11 (ROU 288)**.** On introduit la notation $D^k f(a)(h)^k$ pour le terme $D^k f(a)(h, h, .., h)$, où $h \in \mathbb{R}^n$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 12 (ROU 287)**.** [Taylor-Young] Si f est k fois différentiable en $a \in U$, on a

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h - ... - \frac{1}{k!}D^k f(a)(h)^k = o_{h\to 0}(\|h\|^k)$$

Théorème 13 (ROU 288)**.** [Formule de Taylor avec reste intégral] Si f est de classe C^{k+1} sur U et si $[a, a+h] \subset U$, on a

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h - ... - \frac{1}{k!}D^k f(a)(h)^k = \int_0^1 \frac{(a-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt$$

Corollaire 14 (ROU 288)**.** Sous les hypothèse du théorème précedent, pour tout compact convexe $K \subset U$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $a \in \mathbb{K}$ et $a + h \in \mathbb{K}$,

$$\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h - ... - \frac{1}{k!}D^k f(a)(h)^k\| \leq C\|h\|^{k+1}$$

Remarque 15 (ROU 288)**.** La formule avec reste intégral est encore la plus précise, on la préferera lorsque l'on aura besoin d'information détaillées sur le reste.

2 Applications

2.1 Développement limité

Définition 16 (TL1 871)**.** On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au point a s'il existe u polynôme P de degré au plus n tel que $f(x) = P(x) + o_a(x-a)^n$ au voisinage de a.
P est appelée la partie régulière du développement limité.

Notation 17. On notera admet un $DL_n(a)$ pour "admet un développement limite à l'ordre n au voisinage de a".

Proposition 18 (TL1 873)**.** [corollaire Taylor Young] Supposons f n fois continûment dérivable sur un intervalle I. Alors pour tout point $a \in I$, f a un développement limité d'ordre n au point a, dont les coefficients sont $\alpha_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Savoir réciproque fausse + cex TL2p 874

Exemple 19 (TL1 654)**.** Prenons l'exemple de la fonction exp, dont on considère la définition de terminal : c'est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Une récurrence nous permet de montrer que exp est continûment dérivable à tout ordre et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $exp^{(n)} = exp$ avec $exp^{(n)}(0) = 1$. Si l'on considère $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq \alpha$, l'inégalité de Taylor permet de majorer le reste par $\exp(\alpha)\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}$. Ce terme tend vers 0 à l'infini donc on en déduit que $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout $|x| \leq \alpha$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 20 (BER 145)**.** [DEV abusé] Soient $b > 0$ et $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ continue, croissante telle que :

1. $f(0) = 0$ et $f(x) < x, \forall x \in]0, b]$
2. $\exists \lambda > 0, \exists r > 1, f(x) = x - \lambda x^r + o_{x\to 0}(x^r)$

. On pose, pour tout $c \in]0, b[$, la suite définie par $u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, $(u_n)_n$ est à valeur dans $]0, b[$, tend vers 0 et $u_n \sim_{n\to\infty} (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$.

Application 21 (BERNIS DEV abusé)**.** En particulier, pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$, on a le développement assymptotique $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o(\frac{\ln(n)}{n^2})$.

2.2 Fonctions développable en série entière

Définition 22 (TAU 40)**.** Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière au point z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Définition 23 (TL2 594)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ et $a \in \mathring{J}$.
La série $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ est appelée série de Taylor de f en a.

Remarque 24 (TL2 594)**.** Lorsque $a = 0$, c'est une série entière.

Théorème 25 (TAU 40)**.** Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0 et admettant un développement en série entière à l'origine.

1. Il existe un voisinage de 0 sur lequel f est indéfiniment dérivable.
2. Le développement en série entière de f à l'origine est son développement de Taylor.

Corollaire 26 (TAU 40, TL2 594-595)**.**
1. S'il existe, le développement en série entière à l'origine d'une fonction est unique, c'est le développement de Taylor en 0.
2. Si f est développable en série entière à l'origine, ses dérivées successives le sont aussi, et leurs développements sont les séries entières dérivées successives du développement de f.
3. Soient f, g développables en série entière à l'origine et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f+g$, λf, fg sont également développable en série entière à l'oigine.

Une série de Taylor d'une fonction en 0 ayant un rayon de convergence strictement positif peut avoir une somme qui ne coïncide pas avec f dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

Contre-exemple 27 (TL2 je crois)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 pour $x = 0$ et e^{-1/x^2} si $x \neq 0$ a une série de Taylor identiquement nulle qui n'est donc pas égale à f.

2.3 Méthode de Newton

Théorème 28 (ROU 144, TL2 983)**.** [méthode de Newton, DEV 1 ?]
Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour tout $n \leq 0$. Alors, f a un unique zéro a et on a :

1. $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge vers a de manière quadratique.
2. Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$, alors pour tout $x_0 \in]a,d]$, $(x_n)_n$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim_{n\to\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

(cf annexe 2).

Exemple 29 (TL1 560)**.** [Algorithme de Babylone] En considérant $f(x) = x^2 - 2$, cette méthode permet d'approché $\sqrt{2}$.

2.4 En probabilité

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires réelles et soit X une variable aléatoire.

Définition 30 (GAR 295)**.** On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée, $E(f(Xn))$ converge vers $E(f(X))$.

Proposition 31. Cf Sandy mais pas sûre, c'est chelou !

Théorème 32 (GAR 307)**.** [Pas même énoncé car preuve par <3] Soit (X_n) indépendantes et identiquements distribuées admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\sqrt{n}\left(\frac{X1 + \ldots + Xn}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbb{V}(X_1))$$