Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

Dans cette leçon $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E sera un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1 Définition des espaces

1.1 Espace préhilbertien

Définition 1 (HIR 84, changer barre pour aller avec TL2)**.** Un produit scalaire hermitien sur E est une application $< .,. >: E^2 \to \mathbb{K}$ telle que pour tous $(x,y,z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $< x+\overline{\lambda}y, z > = < x,z > +\lambda < y,z >$
2. $< x, y+\lambda z > = < x,y > +\lambda < x,z >$
3. $< x,y > = \overline{< y,x >}$
4. $< x,x > \geq 0$
5. $< x,x > = 0 \iff x = 0$

Exemple 2 (TL2 260)**.** CF autre exemples TL2 183.

Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{K}^n$ est définit par $< x,y > = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$.
Si on considère $\mathbb{R}^2$, on peut définir le produit scalaire canonique ci-dessus mais également le produit scalaire $< x,y > = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_1$. Ceci montre que l'on peut définir plusieurs produits scalaires sur un même espace.

Définition 3 (GOU 429, pas hilbert)**.** Un espace vectoriel est dit pré-hilbertien s'il est muni d'un produit scalaire.

Exemple 4 (TL2 182)**.** $(C([a,b],\mathbb{R}), < .,. >)$ où $< f,g > = \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un espace préhilbertien.

$\ell^2(\mathbb{C}) = \{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} | \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ muni de $< .,. >: (x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n} y_n$ est un espace préhilbertien.

Proposition 5 (TL2 183)**.** Soient $(E, < .,. >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $(F, < .,. >_{|F})$ est également un espace préhilbertien, où $< .,. >_{|F}$ est la restriction du produit scalaire à F.

Proposition 6 (HIR 86, 87)**.** [Inégalité Cauchy Schwarz] Soit $(E, < .,. >)$ un espace préhilbertien. Pour tous $x,y \in E$, on a : $| < x,y > |^2 \leq < x,x >< y,y >$.
Il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Corollaire 7 (HIR 87, TL2 261, 468)**.** Soit $< .,. >$ un produit scalaire sur E. L'application $x \mapsto (< x,x >)^{1/2}$ est une norme sur E. On l'appelle norme issue du produit scalaire $< .,. >$.

Proposition 8 (TL1 184)**.** [identité du parallélogramme, C'est même un ssi] Soit $(E, < .,. >)$ un espace préhilbertien réel. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
(cf annexe 1. pour représentation géométrique)

1.2 Espace de Hilbert

Définition 9 (TL2 497)**.** Un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit complet.

Définition 10 (TL2 533)**.** On appelle espaces de Hilbert tout espace préhilbertien complet (pour la norme associé à son produit scalaire).

Exemple 11 (HIR 88, OA attention notation)**.** Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

2 Orthogonalité et dimension finie

2.1 Généralités

On considère dans cette partie $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien.

Définition 12 (HIR 87)**.** Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits orthogonaux si $<x, y>= 0$.

Proposition 13 (TL2 185)**.** [Théorème de Pythagore]

Les vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Si $x_1, .., x_k$ sont des vecteurs deux à deux orthogonaux de E, on a $\|x_1 + ... + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + ... + \|x_k\|^2$.

Définition 14 (HIR 87, TL2 186)**.** Soit A une partie de E. La partie orthogonal à A, noté $A^\perp$ est le sous ensemble $A^\perp = \{x \in A | \forall y \in A, < x, y >= 0\} = \bigcap_{y \in A} Ker(<.,y>)$

Exemple 15 (TL2 186)**.** $E^\perp = \{0\}$.

Proposition 16 (ref??)**.** Soit F un sous-espace vectoriel de E. $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Contre-exemple 17 (ref??)**.** Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $<.,.>= (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Posons $H = \{f \in E | f(0) = 0\}$. $H^\perp = \{0\}$ donc $(H^\perp)^\perp = E \neq F$.

Définition 18. Deux sev F, G sont dit orthogonaux si $\forall (x, y) \in F \times G, < x, y >= 0$.

2.2 Propriétés en dimension finie

Théorème 19 (TL2 189)**.** Supposons E un espace euclidien. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a : $E = F \oplus F^\perp$, $dimF + dimF^\perp = dimE$, $(F^\perp)^\perp = F$

Proposition 20 (TL2 193)**.** Soit F un sev de E. Si F est de dimenion finie alors F admet un supplémentaire orthogonal et , pour tout $x \in E$, $d(x, F) = \|x - p(x)\|$, où p est le projecteur orthogonal sur F. De plus, pour tout $y \in F$ tel que $y \neq p(x)$, on a $d(x, F) < d(x, y)$.

3 Théorème de projection et ses conséquences

Dans toute la partie, on considère $(E, <.,.>)$, sauf mention contraire, un espace de Hilbert.

3.1 Théorème de projection

Théorème 21 (HIR 91, OA 95)**.** [DEV1] Soit C un convexe fermé non vide de E. Alors :

$$\forall x \in E, \exists! y \in C, d(x, y) = d(x, C) := \inf_{c \in C} d(x, c)$$

Ce point est appelé la projection de x sur C et est noté $p_C(x)$. (cf annexe 2)a)) De plus, on a la caractérisation suivante :

$$y = p_c(x) \iff y \in C \text{ et } \forall c \in C, Re(< x - c, y - c >) \leq 0$$

(cf Annexe 2)b))

Remarque 22 (formulation dans TL1 536, HIR 92)**.** Ce théorème reste vrai en considérant un espace préhilbertien E et en ajoutant une hypothèse de complétude sur C.

Proposition 23. Soit C un convexe fermé (non vide) d'un espace de Hilbert H. L'application $p_C : x \mapsto p_C(x)$ est $1-$lipchitzienne et en particulier continue. (cf annexe 2)c))

3.2 Orthogonalité dans un Hilbert

Proposition 24 (HIR 93). Pour tout sous espace vectoriel fermé F de E, $E = F \oplus F^\perp$ et le projecteur sur F associé à cette somme direct est p_F.

Proposition 25 (HIR 93). Pour tout sous-espace vectoriel F de E, $E = \overline{F} \oplus F^\perp$.

En particulier, F est dense dans E si et seulement si $F^\perp = \{0\}$

Contre-exemple 26 (OA 98). Considérons F le sev de $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites nulles à partir d'un certain rang. On constate que $\overline{F} = \ell^2(\mathbb{N})$ et $F^\perp = \{0\}$. Or F n'est pas fermé et $F \oplus F^\perp = \ell^2(\mathbb{N})$.

3.3 Théorème de Riesz

Théorème 27 (HIR 96, TL2 428 et GOU 428). [Theorème de Riesz] Soit $(E, < .,. >)$ un espace de Hilbert. Pour tout $a \in E$, on note φ_a la forme linéaire $\varphi_a : x \mapsto < a, x >$ sur E. Alors $\varphi : a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme de E sur son dual topologique.

App : on s'en sert pour bien définir l'adjoint

4 Base dans un Hilbert

Soit $(E, < .,. >)$ un espace préhilbertien

4.1 Famille orthonormée

Définition 28 (No ref, un peu HIR109, TL2 185). Soit (e_i) une famille de vecteurs de E. On dit que $(e_i)_i$ est :

1. orthogonal si pour tous $i \neq j$, $< e_i, e_j >= 0$
2. orthonormal si pour tous i, j, $< e_i, e_j >= \delta_{i,j}$

Exemple 29. [TL2, HIR 108] Posons $\delta_k \in \ell^2$ la suite dont les termes sont tous nuls sauf celui d'indice k qui vaut 1. (δ_k) est une famille orthonormée.

ℓ^2 pas de BON TL1 185 rem

Proposition 30 (HIR 109). Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale finie de E et soit F l'espace vectoriel engendré par cette famille. Pour tout $x \in E$, la projection orthogonale $p_F(x)$de x sur F est donnée par $p_F(x) = \sum\limits_{i \in I} < x, e_i > e_i$.

En conséquence, $\|x\|^2 = \left\| x - \sum\limits_{i \in I} < x, e_i > e_i \right\|^2 + \sum\limits_{i \in I} | < x, e_i > |^2$.

Donne méthode pour calculer $p_F(x)$ grâce à une BON $(e_i)_i$

Proposition 31 (HIR 109). [Inégalité de Bessel] Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de E. Alors, pour tout $x \in E$, $\sum\limits_{i \in I} | < x, e_i > |^2 \leq \|x\|^2$.

égalité si x dans F= vect(ei)

En part famille $< x, e_i >$ élément de $\ell^2(I)$

4.2 Base hilbertienne

généralise notion de base orthonormée. Important pour séries de Fourier. Attention base hilbertienne pas toujours base sens algébrique (libre , gén)

Définition 32 (TL2 536).

Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de E est dite totale (ou complète) si le sous-espace vectoriel V qu'elle engendre est dense dans E, c'est-à-dire, si tout $x \in E$ est limite d'une suite de V.

Si de plus, E est un espace de Hilbert et si $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormée, on dit que c'est une base hilbertienne de E.

Exemple 33 (TL2 540). Notons V le sous-espace engendré par la famille (δ_k) de l'exemple 29. (δ_k) n'est pas une base de $\ell^2(\mathbb{R})$: $(2^{-k})_k \in l^2(\mathbb{R}) \subset V$. Cependant c'est une base préhilbertienne. En effet, si on considère $u \in \ell^2(\mathbb{R})$, on montre que u est limite de la suite $(\sum\limits_{k=0}^{p} u_k \delta_k)_p$ de V.

Proposition 34 (TL2 536)**.** Toute base orthonormée est une famille orthonormée totale.
La réciproque est vraie en dimension finie.

Proposition 35 (TL2 536)**.** Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée d'un espace préhilbertien E. Si cette famille est totale, c'est une famille orthonomée maximale (pour l'inclusion).
La réciproque est vraie lorsque E est un Hilbert.

Théorème 36 (TL2 551)**.** Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormée de E. Pour tous $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n :=< e_n, x >$. LASSE :

1. $(e_n)_n$ est totale
2. Pour tout $x \in E$,la série numérique $\sum |x_n|^2$ converge et l'on a : $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$ (égalité de Parseval)
3. $\forall x, y \in E$, la série numérique $\sum\limits_{n\leq 0} \overline{x_n} y_n$ converge absolument et l'on a : $< x, y >= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n} y_n$
4. $\forall x \in E$, la série $\sum x_n e_n$ converge (dans E) et sa somme est x.

Proposition 37 (HOU ?)**.** Une suite de L^2 $(\varphi_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de L^2 si elle est orthonormale et si : $\forall f \in L^2, \forall i \in I, < \varphi_i, f >= 0 \implies f = 0$

5 L'exemple fondamental de l'espace L^2

généralise exemple fil rouge

5.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 38 (HIR 85, BP 171, 163)**.** Pour $f : \Omega \to \mathbb{K}$ mesurable, on pose : Pour tout $< f, g >:= \int_\Omega \overline{f(t)} g(t)dt$
On définit également $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid < f, f >< +\infty\}$ et $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\sim$ où $f \sim g \iff \mu(\{x \in \Omega | f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Proposition 39 (un peu HIR 125)**.** $(L^2(\Omega), < ., . >)$ est un espace de Hilbert.

Application 40 (HOU 515-518)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la $n-$ième fonction de Hermite par $h_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$.
Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

1. $< h_n, h_m >= 0$ si $m \neq n$
2. $< h_n, h_m >= 2^n n! \sqrt{\pi}$ si $m = n$

De plus : DEV2
La famille $(h_n)_n$ est une famille orthogonale et la famille $(\frac{h_n}{\|h_n\|})_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

5.2 Séries de Fourier

Notation 41 (ELA . F 171)**.** On note $L^2_{2\pi}$ l'espace des fonctions $2\pi-$périodiques de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$.
On pose $< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : t \mapsto e^{int}$.

Définition 42 (HIR 111, ELA F 173)**.** La suite des coefficients de fourier de $f \in C^{\mathbb{C}}_{2\pi}$ est définie par $c_n(f) =< f, e_n > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

Proposition 43 (ELA F 171)**.** $(L^2_{2\pi}, < ., . >)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 44 (ELA F 172)**.** $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Corollaire 45 (HIR 111, remplacer C par L)**.** Si $f \in L^2_{2\pi}$ alors $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ et l'égalité de Parseval donne $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} |f(t)|^2 dt$

5.3 Cas des variables aléatoires

Application 46 (BL 156)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Soit de plus X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ intégrable. Alors il existe une unique (p.s.) variable aléatoire appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ telle que :

1. $w \mapsto \mathbb{E}(X|\mathcal{B})(w)$ est $\mathcal{B}-$mesurable
2. $\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B})d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}$