Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

1 Approximation de fonctions continues

1.1 Formules de Taylor

Théorème 1 (TL1 652)**.** [Taylor-Lagrange, Global : comportement fonction sur voisinage] Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction n fois continûment dérivable sur un segment $[a, b]$ et dont la dérivée $(n+1)$ème existe sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Corollaire 2. Soient f une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, il existe $c_x \in I$ tel que :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

La partie $\sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ est un polynôme en x de degré au plus n que l'on appelle polynôme de Taylor ou polynôme d'approximation de f au point a à l'ordre n. L'autre partie est appelée le reste de Taylor.

Remarque 3. Le reste de Taylor mesure la différence entre la fonction f et le polynôme d'approximation. C'est l'écriture de ce reste qui diffère les formules de Lagrange

Théorème 4 (TL1 654)**.** [Inégalité de Taylor-Lagrange] Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle I dont la $(n+1)$ème dérivée est bornée par $M \geq 0$. Alors pour tout point $a \in I$, on a :

$$\forall x \in I |f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Application 5 (TL1 654)**.** Cette inégalité permet de donner majoration de l'erreur d'approximation.

Application 6. Ce résultat peut permettre de retrouver le développement en série d'une fonction en un point.

Exemple 7 (TL1 654)**.** Prenons l'exemple de la fonction exp, dont on considère la définition de terminal : c'est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Une récurrence nous permet de montrer que exp est continûment dérivable à tout ordre et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $exp^{(n)} = exp$ avec $exp^{(n)}(0) = 1$. Si l'on considère $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq \alpha$, l'inégalité de Taylor permet de majorer le reste par $\exp(\alpha)\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}$. Ce terme tend vers 0 à l'infini donc on en déduit que $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout $|x| \leq \alpha$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 8 (TL1 869)**.** [Formule de Taylor Young, Locale : comportement fonction en un point] Supposons f n fois continûment dérivable sur un intervalle I. Alors, pour tout point $a \in I$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

HYpothèses peuvent être améliorer et juste n dérivable au point a mais démo plus dur

Application 9. Ce théorème nous permet de trouver des développements limités, utiles notamment pour la recherche de limite.

Exemple 10 (TL 1 855)**.** On peut par exemple chercher à approcher sin en 0 par un polynôme. En utilisant la formule de Taylor-Young aux ordres $1, 3, 5, 7, 9$, on peut comparer cette fonction aux polynômes : $P_1 := x; P_3 := x - \frac{x^3}{6}; P_5 := x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}; P_7 := x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}; P_9 := x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$. (cf annexe)

Théorème 11 (Taylor avec reste intégral)**.** [TL1 857] Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fontion $(n+1)$ fois continûment dérivable sur un intervalle I. Alors, pour tout point $a \in I$, on a : $\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$

Remarque 12. Cette formule nous apporte plus d'informations sur le reste.

1.2 Théorème de Weierstrass

Soient X, Y deux espaces métrique.

Théorème 13 (TL2)**.** [Heine, Je le mets ici car sert dans demo de Weierstrass] Soient $f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact, alors f est uniformément continue

Théorème 14 (TL2 557)**.** [2e Dini, example suivant utile dans dem weierstrass] Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $I = [a, b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. Si f est continue, la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme.

Exemple 15 (TL2 558, utile dans dem Weierstrass)**.** Soit $I := [0, 1]$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_0 := 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f_n + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2)$. Cette suite converge simplement vers $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue. De plus, chaque f_n est croissant donc le théorème de Dini nous dit que la convergence est uniforme.

Théorème 16 (GOU 235, TL2 563)**.** [Théorème de Weierstrass] Toute fonction continue $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.
Autrement dit, l'ensemble des fonctions polynomiales $\mathcal{P}$ sur I est dense dans l'e.v.n. $(C(I, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

Avoir en tête : Utilité max : approcher fonctions par des polynômes. J'ai pas réussi à trouver d'exemples d'applications :(.

Avoir en tête contre-ex $1/x$ sur $]0, 1]$ (TL2 564)

1.3 Interpolation de Lagrange

Définition 17 (TL1 298, ça et celui d'après aussi ok dans C)**.** Soit $a_0, .., a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit le polynôme :

$$L_i := \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Proposition 18 (TL1 298)**.** Ces polynômes sont de degré n et on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Théorème 19 (TL1 298)**.** Pour tout $(b_1, .., b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $P(a_1) = b_1, ..., P(a_n) = b_n$. Il s'agit du polynôme $P = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i$.

Dans la suite, on considère $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\{a_0, .., a_n\}$ des points deux à deux distincts de $[a, b]$.

Définition 20 (TL2 985)**.** On associe à f le $n-$uplet $(f(a_0), ..., f(a_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et le polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}_n[X]$ correspondant. On dit alors que les a_i sont les points d'interpolation, que les $f(a_i)$ sont les valeurs d'interpolation et que le polynôme P est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f au points a_i.

Notation 21 (TL2 985)**.** On notera le polynôme de la définition précédente $L[a_0, ..., a_n; f]$.

Exemple 22 (No ref)**.** Considérons la fonction sin sur $[0, \pi]$. On considère les points $a_0 = 0, a_1 = \frac{\pi}{2}, a_2 = \pi$. On a $f(a_0)$ et $f(a_2)$ qui sont nulles, donc $P = L_1 \sin(a_1) = -\frac{4}{\pi^2}(X^2 - X\pi)$.

Théorème 23 (TL2 986)**.** Supposons f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in [a, b]$ tel que :

$$f(x) - L[a_0, ..., a_n; f](x) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - a_i)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

Corollaire 24 (TL2 986)**.** On se place dans le même cadre que le théorème précédnet. On a la majoration suivante de d'approximation :

$$\|f - L[a_0, ..., a_n; f](x)\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \left\| \prod_{i=0}^{n} (X - a_i) \right\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Remarque 25. L'erreur d'approximation dépend donc du choix des points d'interpolation et de la régularité de f.

Avoir en tête que c'est une méthode couteuse en calcul. On a "méthode des différences divisées" qui réduit ce coût. [TL2 987]

2 Approximation en théorie de l'intégration

2.1 Lemme fondamental d'approximation

Théorème 26 (BP 75)**.** [Lemme fondamental d'approximation] Si f est mesurable à valeur dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, alors il existe une suite de fonctions étagées $(f_n)_{n\geq 1}$, telle que, pour tout $x \in X$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$. En outre,

1. Si $f \geq 0$, on peut choisir la suite $(f_n)_n$ croissante positive : $0 \leq f_n \leq f_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Si f est bornée, on peut choisir la suite $(f_n)_n$ de façon que f_n converge uniformément vers f.

Application 27 (No ref)**.** Ce théorème sert à passer des résultats concernant les fonctions étagées à des résultats sur les fonctions mesurables. [cf BP : propriété intégrale focntions mes., fub ton, theorem de transfert]

2.2 Exemple d'approximation par des polynômes orthogonaux

Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien

Définition 28 (TL2 536)**.** Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de E est dite totale (ou complète) si le sous-espace vectoriel V qu'elle engendre est dense dans E, c'est-à-dire, si tout $x \in E$ est limite d'une suite de V.

Si de plus, E est un espace de Hilbert et si $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée, on dit que c'est une base hilbertienne de E.

Proposition 29 (No ref, bibmath)**.** Si $(e_i)_i$ est une base hilbertienne de E, alors pour tout $x \in E$ on a :

$$x = \sum_{i\in I} < x, e_i > e_i$$

Proposition 30 (HOU ?)**.** Une suite de L^2 $(\varphi_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de L^2 si elle est orthonormale et si : $\forall f \in L^2, \forall i \in I, < \varphi_i, f >= 0 \implies f = 0$

Définition 31 (HOU 515-518)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la $n-$ième fonction de Hermite par $h_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

Proposition 32 (HOU 515-518)**.** Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

1. $< h_n, h_m >= 0$ si $m \neq n$
2. $< h_n, h_m >= 2^n n! \sqrt{\pi}$ si $m = n$

Théorème 33 (HOU 515-518)**.** [DEV 1, 2ème point] La famille $(h_n)_n$ est une famille orthogonale et la famille $(\frac{h_n}{\|h_n\|})_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Application 34 (No ref)**.** On peut alors approximer une fonction L^2 par une combinaison linéaire de ces fonctions.

3 Approximation de fonctions périodiques

3.1 Prérequis

Considérons $f \in C^{pm}_{2\pi}$.

Notation 35 (TL2 735)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$ on définit $e_n : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{int}$

Définition 36 (GOU 268)**.** On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes définis par :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Définition 37 (GOU 269, TL2 736)**.** On appelle série de Fourier associée à f la série trigonométrique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

La $N-$ième somme partielle de la série de Fourier de f est $S_n(f) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$

3.2 Approximation ponctuelle

Définition 38 (ELA 311)**.** Soit $N \in \mathbb{N}$. La fonction $D_N := \sum\limits_{k=-N}^{N} e_k$ est appelée le noyau de Dirichlet d'ordre N.

Proposition 39 (ELA 311)**.**

1. D_N est une fonction paire $2\pi-$ périodique et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$
2. D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}$.
3. Pour $f \in C_{2\pi}^{pm}$, on a $S_N(f) = f * D_N$

Théorème 40 (Dirichlet)**.** [GOU 272, ELA 322] Si f est $2\pi-$périodique et C^1 par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f covnerge en ce point x vers $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Avoir en tête que ça nécessite le lemme de Riemann Lebesgue pour le démontrer

Théorème 41 (ELA 316)**.** Si f est $2\pi-$périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Savoir qu'il existe fonction continue $2\pi-$per dont SF diverge en 0, GOU 275, mais ne pas mettre car dem compliqué

Application 42 (No ref)**.** Une application de ces approximations est le calcul de certaines somme.

Exemple 43 (GOU 273)**.** En considérant la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$périodique définit par $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. En étudiant la série de Fourier de cete fonction, on trouve que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ou encore $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

3.3 Approximation uniforme

On considère de nouveau $f \in C_{2\pi}$. Motivation de cette partie : thm dirichlet nécessite régularité forte. Diminue ces condition pour la moyenne de Césaro

Définition 44 (TL2 751)**.** Soit $N \in \mathbb{N}$. La fonction $T_n(f) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k$ est appelée le noyau de Féjer d'ordre N.

Notation 45 (A voir, bouger)**.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n := \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} D_k$

Proposition 46. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $F_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2(\frac{n+1}{2})t}{\sin^2(\frac{t}{2})}$.

Lemme 47 (DEV 2)**.** pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $T_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)F_n(y)dy$

Lemme 48 (ELA F)**.** [DEV 2]

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est positive
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1$

3. $\forall \alpha \in]0, \pi[, D_\alpha := [-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{D_\alpha} F_n(t)dt = 0$

Théorème 49 (TL2 752, ELA 408)**.** [Féjèr DEV 2] $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.