Leçon 208: Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

On désignera par $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et par E un $\mathbb{K}-$ev. Pour $x \in \mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on notera $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ les coordonées de x dans la base canonique.

1 Généralités

1.1 Espaces métriques

Définition 1 (TL2 468)**.** On appelle norme sur un espace vectoriel E toute application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ possédant les propriétés suivantes :

1. séparation : $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \implies x = 0$
2. homogénéité : $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

On appelle espace vectoriel normé (e.v.n.) tout couple $(E, \|\cdot\|)$ formé d'un espace vectoriel E et d'une nomre $\|\cdot\|$ sur E.

Exemple 2 (no ref mais bon ça va)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Définissons

1. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\|.\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ par $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$.
2. et $\|.\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ par $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$.

Ces applications sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Proposition 3 (TL2 468)**.** Soit $\|.\|$ une norme sur E. Pour tout éléments $x_1, .., x_n$ de E, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Proposition 4 (TL2 468)**.** [seconde inégalité triangulaire] Soit $\|.\|$ une norme sur E. Pour tout $x, y \in E$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

Définition 5 (GOU 47, TL2 495)**.** Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur E sont dites équivalentes si

$$\exists a > 0, \exists b > 0, \forall x \in E, a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

Exemple 6. Les normes $\|.\|_p$ ($p \in [1, +\infty]$) sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.

Proposition/définition 7. Soit $\|.\|$ une norme sur E. L'application $d : (x, y) \in E \mapsto \|x - y\|$ est une distance. On dit que c'est la distance associé à la nomre $\|.\|$.

1.2 Applications continues

Considérons deux e.v.n. $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$.

Notation 8. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}_C(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Proposition 9 (TL2 490 + 1 assertion (GOU 48))**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. LASSE

1. f est continue sur E
2. f est continue en 0
3. $\exists C > 0, \forall x \in E, \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E$

Proposition 10 (No ref, un peu TL2 496)**.** Soient $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux normes équivalentes de E. Un application $f : E \to X$ est continue pour $\|.\|$ si et seulement si elle est continue pour $\|.\|'$.

Définition 11 (TL2 490)**.** Soit $L \in \mathcal{L}_C(E,F)$. On appelle norme fonctionnelle de L le réel $|||L|||$ défini ainsi :

$$|||L||| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Proposition 12. Pour tout $x \in E$, on a $\|L(x)\| \leq |||L|||\|x\|$

Proposition 13 (TL2 490)**.** Soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$. L est continue si et seulement si L est bornée sur la sphère unité (resp. la boule unité férmée) de E. Si tel est le cas, la norme $|||L|||$ peut être calculée de plusieurs manières

$$|||L||| = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|L(x)\|_F$$

Proposition 14. Une forme linéaire sur un e.v.n. est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Proposition/définition 15 (TL2 492 remanié)**.** $(\mathcal{L}_c(E,F), |||.|||)$ est un espace vectoriel normé. On appelle cet espace le dual topologique de E.

Proposition 16 (TL2 492)**.** Soient G un troisième e.v.n. et $f \in \mathcal{L}_C(E,F)$, $g \in \mathcal{L}_C(F,G)$. Alors $g\circ f \in \mathcal{L}_C(E,G)$ et $|||g\circ f||| \leq |||g||| \times |||f|||$.

2 Espaces vectoriels normés remarquables

2.1 En dimension finie

Proposition 17 (TL2 513, GOU)**.** [DEV1] Sur un e.v.n. de dimension finie, toutes le normes sont équivalentes.

Corollaire 18 (TL2 514)**.** [DEV1, attention pas toutà fait pareil que TL2, plus GOU] Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$. On a les propriétés suivantes :

1. L'espace E est complet
2. Tout sous-espace vetoriel de dimension finie est fermé
3. Toute application linéaire de E dans un e.v.n. quelconque est continue.

Corollaire 19 (TL2 514, GOU 50)**.** Une partie de E est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

thm de Riesz donne contre ex puisque boule unité pas fermée.

Proposition 20 (TL2 515)**.** Soient $E_1, ..., E_n$ des e.v.n. de dimension finie. Toute application $n-$linéaire de $E_1 \times ... \times E_n$ dans un e.v.n quelconque est continue.

Application 21 (TL2 515)**.** Soit V un sev de dimension finie d'un e.v.n. E. Pour tout $x \in E$, $d(x,V)$ est atteinte

Application 22 (TL2 515)**.** Soit f une application linéaire d'un e.v.n E de dimension finie dans un e.v.n. F. Il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|f(x)\| = |||f|||$

Théorème 23 (GOU 56)**.** [théorème de Riesz][DEV1] E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est fermée.

2.2 Espace de Banach

Définition 24. Un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit complet. Si un e.v.n. est complet pour la distance associé à sa norme, on dit que c'est un espace de Banach.

Exemple 25 (TL2 498)**.** $\mathbb{R}^p$ est complet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. En particulier $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

Proposition 26 (No ref, un peu TL2 496)**.** Soient $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux normes équivalentes de E. $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, \|.\|')$ en est un.

Proposition 27 (GOU 48)**.** Si F est un Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

Application 28 (GOU 49)**.** Le dual topologique de E est un espace de Banach.

Proposition 29 (GOU 52)**.** Soit $(E, \|.\|)$. E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Proposition 30 (GOU 49)**.** Soient E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_C(E)$ tel que $|||u||| < 1$. Alors $id - u$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_C(E)$.

Théorème 31 (TL2 501)**.** [Théorème du point fixe de Banach Picard] Toute application contractante f de X dans lui-même possède un unique point fixe a. De plus, pour tout point $b \in X$, on peut obtenir a comme limite de la suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme $u_0 = b$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

3 Espaces préhilbertiens et de Hilbert

Définition 32 (No ref pour le moment, au pire ne pas mettre à voir)**.** Un produit scalaire hermitien sur E est une application $< ., . >: E^2 \to \mathbb{K}$ telle que pour tous $(x, y, z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $< x + \lambda y, z >=< x, z > +\lambda < y, z >$
2. $< x, y + \lambda z >=< x, y > +\overline{\lambda} < x, z >$
3. $< x, y >= \overline{< y, x >}$
4. $< x, x >\leq 0$
5. $< x, x >= 0 \iff x = 0$

Proposition/définition 33 (TL2 261, 468)**.** Soit $< ., . >$ un produit scalaire sur E. L'application $x \mapsto (< x, x >)^{1/2}$ est une norme sur E. On l'appelle norme issue du produit scalaire $< ., . >$.

Exemple 34. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{K}^n$ conduit à la norme $\|.\|_2$ définit dans le premier exemple.

Définition 35 (GOU 429)**.** Un espace vectoriel est dit préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire. S'il est complet pour la norme issue du produit scalaire, on dit que c'est un espace de Hilbert

Théorème 36 (HIR 91, OA 95)**.** [DEV2] Soit C un convexe fermé non vide de E. Alors :

$$\forall x \in E, \exists! y \in C, d(x, y) = d(x, C) := \inf_{c \in C} d(x, c)$$

Ce point est appelé la projection de x sur C et est noté $p_C(x)$. De plus, on a la caractérisation suivante :

$$y = p_c(x) \iff y \in C \text{ et } \forall c \in C, Re(< x - c, y - c >) \leq 0$$

Remarque 37 (formulation dans TL1 536, HIR 92)**.** Ce théorème reste vrai en considérant un espace préhilbertien E et en ajoutant une hypothèse de complétude sur C.

Aussi ok si H un hilbert. et C pas besoin de complet juste fermée (car entraine complet).

4 Exemple d'e.v.n. classiques

4.1 L'espace $\ell^p(\mathbb{K})$

Notation 38 (469)**.** Pour $1 \leq p < +\infty$ on note $\ell^p(\mathbb{K}) = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p < \infty\}$ et $\ell^\infty = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | (u_n)_n$ est bornée$\}$.

Définition 39. Soit $1 \leq p < \infty$ et $x \in \ell^p$ on définit $\|.\|_p : (u_n)_n \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p}$ et $\|.\|_\infty : (u_n)_n \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Proposition 40. Pour $p \in [1, \infty]$, $\|.\|_p$ est une norme sur $\ell^p(\mathbb{K})$.

Proposition 41 (TL2 498)**.** Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $(\ell^p(\mathbb{K}), \|.\|_p)$ est un Banach

4.2 L'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$

Notation 42. On note par $C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions contninues bornée de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 43 (HAUC, TL2 469)**.** Les applications suivantes sont des normes sur $C([0,1])$:
$\|.\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)|dt$
$\|.\|_2 : f \mapsto \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$
$\|.\|_\infty : f \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |f(t)|$

Proposition 44 (TL2 499, 516 ?)**.** $C([0,1])$ est complet pour $\|.\|_\infty$.

Exemple 45 (No ref)**.** On définit la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ par $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ pour $t \in [\frac{1}{n^2}, 1]$ et $f_n(t) = n$ sur $[0, \frac{1}{n^2}[$. On a que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy pour $\|.\|_1$ mais n'est pas convergente pour cette norme. Ceci montre que $(C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$ n'est pas complet.

Exemple 46 (TL2 491)**.** L'application $L : f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est continue. De plus, $|||L||| = 1$

Cette section se généralise à $C([a,b],\mathbb{R})$