Leçon 204 : Connexité. Exemples d'applications.

On considère (X, d) un espace métrique. attention pour gourdon à changer E –> X

1 Connexité

1.1 Définitions et premières caractérisations

Définition 1 (TL2 521)**.** X est dit connexe si la partie vide et X sont les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées.

Exemple 2 (TL2 521)**.** L'espace vide et tous les singletons d'éléments de E sont connnexes.

Exemple 3. Des exemples schématique se trouvent en annexe 1.

Proposition 4 (TL2 522)**.** La connexité est une propriété topologique : si deux espaces sont homéomorphes et si l'un est connexe, l'autre l'est également

Proposition 5 (GOU 38)**.** [caractérisation] Chacune des propriétés ci-dessous caractérise la connexité de X :

1. Il n'existe pas de partition de X formée de deux ouverts non vides.
2. Il n'existe pas de partition de X formée de deux fermés non vides.

Exemple 6 (TL2 522)**.** [ou partie sur R] $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe car $]0, +\infty[$ est ouvert dans $\mathbb{R}^*$ et son complémentaire $]-\infty, 0[$ dans $\mathbb{R}^*$ l'est aussi.

Exemple 7 (TL2 522, no ref)**.** [ajout $\mathbb{Q}$] $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ n'est pas connexe car $(]n, n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une partition de $\mathbb{Z}$.

Pour étoffer rem bas page 522 mais n'apporte pas grand chose. Pas une csq d'un tuc juste comme ça marche avec patition ouverts

1.2 Lien avec les applications continues

Proposition 8 (GOU 39)**.** Soit (X', d') un autre espace métrique et $f : (X, d) \to (X', d')$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

Exemple 9 (TL2 523)**.** Le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ est connexe comme image de $[0, 2\pi]$ (qui est connexe) par l'application continue $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$

Proposition 10 (TL2 522)**.** Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. En particulier $\mathbb{R}$ est lui-même connexe.

Corollaire 11 (No ref)**.** $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe. autre moyen : En posant $I =]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$ et $J =]\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$, on a $\mathbb{Q} = I \cap J$ donc $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

Contre-exemple 12 (HAU 296)**.** Considérons $f : x \mapsto x^2$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. L'intervalle $I = [1, +\infty[$ est connexe or $f^{-1}(I) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ qui n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$.

entremelement, c.ex de prop 7 masi need prop 9 pour l'avoir. Puis corollaire de prop 9

Corollaire 13 (TL2 522, GOU 40)**.** [Théorème des valeurs intermédiaires] Soient X un espace connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f pend les valeurs a et b, $a < b$, elle prend toute valeur $c \in]a, b[$.

Proposition 14 (TL2 522 énoncé, dem GOU 49)**.** [caractérisation par les fonctions] Un espace métrique X est connexe si et seulement si, toute fonction continue sur X dans le sous-espace $\{0, 1\}$ de $\mathbb{R}$ est constante.

Proposition 15 (GOU 40, TL2 522)**.** Soit A est une partie connexe de l'espace X. Toute partie B de E vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

Savoir réciproque fausse, cf annexe "cachée"

Exemple 16. Si A est une partie connexe de l'espace X, $\overline{A}$ est également connexe.

1.3 Union, ensemble produit

Contre-exemple 17 (HAU 296)**.** Posons $A =]-\infty, 0[$ et $B =]0, +\infty[$. A et B sont connexes mais $A \cup B$ n'est pas connexe (puisqu'on a directement une partition en deux ouverts). Ceci montre qu'une intersection de connexes n'est pas connnexe.

Proposition 18 (GOU 40)**.** Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de X telle que

$$\exists i_0 \in I, \forall i \in I, C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$$

Alors $\bigcup\limits_{i\in I} C_i$ est connexe.

Proposition 19 (GOU 40)**.** Soit $(C_i)_{i\in \mathbb{N}}$ une famille au plus dénombrable de connexes de X telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, C_i \cap C_{i-1} \neq \emptyset$$

Alors $\bigcup\limits_{i\in I} C_i$ est connexe.

Contre-exemple 20. Posons $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$. $\mathbb{U}$ est un connexe de $\mathbb{C}$ car c'est l'image de $\mathbb{R}$ qui est connexe, par l'application continue $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it}$. Cependant $\mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{-1, 1\} = \{-1\} \cap \{1\}$ n'est pas connexe. Ceci montre que l'intersection de deux connexes n'est pas forcément connexe. (cf annexe 2)
($\{-1\} = B(-1, \frac{1}{2}$ et pareil $\{1\} = B(1, \frac{1}{2}$ d'où ouverts disjoints qui partitionnent $\{-1, 1\}$)

Pas trouvé de résultat pour intersection.

Proposition 21 (GOU 40)**.** Soient $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ des espaces métriques (en nombre fini). L'espace produit $E = E_1 \times ... \times E_n$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout i.

Exemple 22. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}^n$ est connexe.

Application 23 (BER)**.** [Hadamard LévyDEV1, 2 => 1] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^2. LASSE

1. f est un C^1 difféomorphisme
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $D_x f$ est inversible, et $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = +\infty$

Insister, application aux difféomorphismmes

2 Composantes connexes

Définition 24 (TL2 524)**.** On définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$a\mathcal{R}b \iff a \text{ et } b \text{ appartiennent à une même partie connexe de } X$$

Exemple 25. On renvoit à l'annexe 1.

Proposition et définition 26 (TL2 524)**.** Cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes sont appelées composantes connexes de X.

Proposition 27 (TL2 524)**.** Soit $a \in X$. La composante connexe de a est la plus grande partie connexe de X contenant a.

Proposition 28 (TL2 524)**.** X est connexe si et seulement si sa seule composante connexe est X.

Exemple 29 (TL2 524)**.** $\mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes qui sont $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

3 Connexité par arc

3.1 Définitions et propriétés

Définition 30 (TL2 524)**.** X est dit connexe par arcs si pour deux points arbitraires $a, b \in X$, il existe un chemin continu joignant a et b, c'est-à-dire une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Exemple 31. On renvoit à l'annexe 3.

Proposition 32 (TL2 525, réécrire, comme dem)**.** Soit (Y, δ) un autre espace métrique et $f : X \to Y$ une fonction continue. Si X est connexe par arc, alors $f(X)$ est connexe par arcs.

Proposition 33 (TL2 524)**.** Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.

Contre-exemple 34 (No ref)**.** On considère Y l'ensemble des points de la spirale paramétrée par $\gamma(t) = \left((1+\frac{1}{t})\cos(t), (1+\frac{1}{t})\sin(t)\right)$. Son adhérence $\overline{Y}$ est connexe mais pas connexe par arcs (cf annexe4).

Proposition 35 (CAL)**.** [DEV1] Gln(C) dense ouvert connexe

Application 36 (HHGG1)**.** (à voir au moins avoir en tête pour questions) L'ensemble des matrices complexes de taille $n \times n$ et de rang r est connexe.

3.2 Composantes connnexes par arcs

Définition 37 (TL2 525)**.** On définit la relation $\sim$ par :

$$a \sim b \iff a \text{ et } b \text{ il existe un chemin continue dans } X \text{ joignant } a \text{ et } b$$

Proposition et définition 38 (TL2 525)**.** Cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes sont appelées composantes connexes par arcs de X.

Proposition 39 (TL2 525)**.** Soit $a \in X$. La composante connexe par arc de a est la plus grande partie connexe par arcs de X contenant a.

Proposition 40 (No ref mais comme pour précédemment (on s'en sert dem après))**.** X est connexe par arcs si et seulement si sa seule composante connexe par arcs est X.

Proposition 41 (TL2 526, GOU 42, réécrire ma sauce)**.** Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E. U est connexe si et seulement si U est connexe par arcs.

4 Quelques applications à l'analyse complexe

4.1 Fonctions analytiques

Soit U un ouvert conexe de $\mathbb{C}$

Théorème 42 (TL2 845, aussi TAU)**.** Soit f une fonction analytiqure sur U. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est identiquement nulle sur U
2. f est identiquement nulle dans un voisinage de z_0
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $df^{(n)}(z_0) = 0$

Corollaire 43 (TL2 845, TAU)**.** Soient f et g deux fonctions analytiques sur U. Si f et g coïncident au voisinage d'un point $z_0 \in U$, alors f est égale à g sur U.

4.2 Fonctions holomorphes

Dans cette partie on considèrera U un ouvert connnexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U.

Proposition 44 (TAU 61)**.** [implique => ssi] f' est identiquement nulle sur U si et suelement si f est constante.

Proposition 45. f constante sur U $\iff$ $Re(f)$ contstante sur U $\iff$ $Im(f)$ contstante sur U $\iff$ $|f|$ contstante sur U $\iff$ $\overline{f} \in \mathcal{H}(U)$

On considère un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Théorème 46 (TAU71)**.** Soient $([a, b], \gamma)$ un chemin fermé et $U = \mathbb{C} \setminus im\gamma$. Pour $z \in U$, on définit l'indice de z par rapport à γ par :

$$ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} d\zeta$$

L'application $z \in U \mapsto ind_\gamma(z)$ est à valeur dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U, et nulle sur la composante connexe non bornée de U.

Application à savoir pour question mais ne pas mettre car danger de questions ++ : Cauchy Lipschitz global ; surjectivité de l'exponentielle de $M_n(C)$ dans $GL_n(C)$. $GL_n(\mathbb{R})$ a 2 c.c. $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$

Proposition 47 (TL2 522)**.** [ne pas mettre mais savoir et savoir dim 1 faut car sphère est $\{-1, 1\}$] Soit E un espace vectoriel normée réel de dimension (finie ou non) au moins égale à 2. Toute sphère de E est connexe par arcs et donc connexe.