Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

On désignera par $\mathbb{K}$ le coprs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces de fonctions continues

Soit X un ensemble non vide et $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans E et f une fonction de X dans E.

1.1 Espace des fonctions bornées

Notation 1 (GOU 232). On note $\mathcal{B}(X, E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans E.

Définition 2 (TL2 549, attention partout TL2 que sur $\mathbb{R}$). On définit pour toute application $f : X \to E$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in E} \|f(x)\|$

Proposition 3 (TL2 553, GOU 232). L'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ de $\mathcal{B}(X, E)$ dans $\mathbb{K}$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$ et on l'appelle norme de la convergence uniforme. En particulier, $\mathcal{B}(X, E)$ est un espace vectoriel normé.

Proposition 4 (GOU 232, TL2 549). Une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{B}(E, X)$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{B}(E, X)$ si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Proposition 5. Si (f_n) est une suite de $\mathcal{B}(X, E)$ qui converge uniformément vers une fonction f, alors $f \in \mathcal{B}(X, E)$

Théorème 6 (TL2 555). [critère de Cauchy uniforme] Supposons E complet. Une suite d'applications $(f_n : X \to E)_n$ converge uniformément si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in X, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$.

Proposition 7 (GOU 232, TL2 551). Si E est un espace de Banach, $(\mathcal{B}(X, E), \|.\|_\infty)$ est également un espace de Banach.

1.2 Espace des fonctions continues dans un compact

Dans cette sous-partie, X désignera une partie compact.

Théorème 8 (TL2 556, GOU 233). Si chaque f_n est continue en $a \in X$ et $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, alors f est continue en a.

Corollaire 9 (TL2 556). Toute limite uniforme d'applications continues est continue.

Notation 10. On note $C(X, E)$ l'espace des applications continues du compact X dans E.

Proposition 11 (TL2 513). Sur un espace métrique compact X, toute fonction réelle continue f est bornée et atteint ses bornes $\sup f$ et $\inf f$.

Théorème 12 (TL2 554). Supposons X compact et E complet. L'espace $C(X, E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(X, e)$. Ainsi $C(X, E)$ muni de $\|.\|_\infty$ est une e.v.n. complet.

Exemple 13 (TL2 554). Pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, les espaces vectoriels $C([a, b], \mathbb{R})$ et $C([a, b], \mathbb{C})$ sont complets lorsqu'on les munit de la norme $\|.\|_\infty$.

Application 14 (BERNIS). [DEV1] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$d'intérieur non vide. Soit $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ continue, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

continue, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathring{I}$. Alors il existe une unique solution y définie sur I tout entier au problème :

$$(C) : \left\{ \begin{array}{c} y'(t) = f(t, y(t)) := A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

1.3 Résultats de densités

Soient X, Y deux espaces métrique.

Théorème 15 (TL2)**.** [Heine, Je le mets ici car sert dans demo de Weiestrass] Soient $f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact, alors f est uniformément continue

Application 16 (TL2 752, ELA 408)**.** [Féjèr, DEV bonus] On considère de nouveau $f \in C_{2\pi}$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose :
$T_n(f) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k$; $D_N := \sum_{k=-N}^{N} e_k$; , $F_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$.
Alors $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Théorème 17 (TL2 557)**.** [1er de Dini] Supposons X compact non vide. Soit $(f_n : X \to \mathbb{R})$ une suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue f. On suppose que, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est décroisante. La suite (f_n) converge alors uniforément vers f.

Exemple 18 (HIR 28, OXENS An2 156, Pour dem Stone-W.)**.** Considérons la suite de fonctions polynômiales définit sur $[-1, 1]$ par : $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$. On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq P_n \leq P_{n+1} \leq |x|$. Ainsi P_n est une suite croissante bornée donc converge simplement et par la relation de récurrence qui définit les P_n, on obtient que cette limite est $x \mapsto |x|$. Le 1er théorème de Dini nous dit alors que cette convergence est uniforme.

Théorème 19 (TL2 557)**.** [2e Dini, example suivant utile dans dem weierstrass] Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $I = [a, b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. Si f est continue, la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme.

Exemple 20 (TL2 558, utile dans dem Weierstrass)**.** Soit $I := [0, 1]$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_0 := 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f_n + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2)$. Cette suite converge simplement vers $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue. De plus, chaque f_n est croissant donc le théorème de Dini nous dit que la convergence est uniforme.

Théorème 21 (GOU 235, TL2 563)**.** [Théorème de Weierstrass] Toute fonction continue $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.
Autrement dit, l'ensemble des fonctions polynomiales $\mathcal{P}$ sur I est dense dans l'e.v.n. $(C(I, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

Avoir en tête : Utilité max : approcher fonctions par des polynômes. J'ai pas réussi à trouver d'exemples d'applications :(.

Avoir en tête contre-ex $1/x$ sur $]0, 1]$ (TL2 564)

Théorème 22 (HIR 28)**.** [Stones Weierstrass] Toute sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C(X, \mathbb{R})$.

2 Espace des fonctions intégrables

2.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 23 (BP 171, 163, FAR 41)**.** Pour $f : \Omega \to \mathbb{K}$ mesurable, on pose :

1. pour tout $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$
2. $\|f\|_\infty := \inf\{c > 0 | \mu(\{x \in \Omega | f(x) > c\}) = 0\}$

Notation 24 (BP 171, 163, FAR 41)**.** On note $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ mesurable } | \|f\|_p < +\infty\}$

Proposition 25 (BP 171, 163, FAR 41)**.** $f \sim g \iff \mu(\{x \in \Omega | f(x) \neq g(x)\}) = 0$ est une relation d'équivalence.

Définition 26 (BP 171, 163, FAR 41)**.** On définit les esapces L^p par $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\sim$.

Proposition 27 (inégalité de Hölder)**.** [BP 165, FAR 42] Soit $(p,q) \in [1,+\infty]^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

$$\forall f \in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu), \forall g \in L^q(\Omega,\mathcal{A},\mu), \|fg\| \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Proposition 28 (FAR 42)**.** [Inégalité de Minkovski] Soit $p \in [1,+\infty]^2$ et $p,q \in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Alors $f+g \in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Corollaire 29 (FAR 43)**.** $\|.\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $\|f\|=0 \iff f=0$ p.s.

Proposition 30 (No ref, un peu FAR 43)**.** Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu),\|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 31 (Riesz Fischer)**.** [BP 172, dev2] Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu),\|.\|_p)$ est un espace de Banach.

Remarque 32. L^2 est en particulier un Hilbert car il existe un produit scalaire sur cette ensemble qui a pour norme associée $\|.\|_2$.

Application 33 (BP 156, Vient de projection sur convexe fermée)**.** Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathbb{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Soit de plus X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ intégrable. Alors il existe une unique (p.s.) variable aléatoire appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ telle que :

1. $w \mapsto \mathbb{E}(X|\mathcal{B})(w)$ est $\mathcal{B}-$mesurable
2. $\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B})d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}$

Proposition 34 (No ref)**.** Si $\mu(X)$ est finie et $1 \leq p < q \leq +\infty$, alors $L^q \subset L^q$. réciproque fausse, essayer trouver example à avoir en tête

2.2 Application à la convolution

Pour fonctions "raisonnablement intégrables", joue rôle important dans les problèmes d'approximation régularisante

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, et $f,g : (\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) deux fonctions boréliennes. Soient $p,q \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Définition 35 (BP 297)**.** Supposons f,g positives. La convolée de f et g, noté $f*g$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, (f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\lambda_d(dy)$$

Proposition et définition 36 (BP 297+299)**.** La fonction $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est borélienne de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$. De plus

$$y \mapsto f(x-y)g(y) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda_d) \iff (|f|*|g|)(x) < +\infty$$

Si tel est le cas, on définit la convolée de f et g en x par $(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\lambda_d(dy)$

Théorème 37 (BP 301)**.** Supposons $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$ et $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{K}}(\lambda_d)$. On a :

1. $(f*g)(x)$ est définie en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ si besoin : continue, bornée par norm p f norme q g ; bilinéarité.
2. Si de plus, $1 < p,q < \infty$, $\lim_{\|x\|\to\infty} (f*g)(x) = 0$.

2.3 Application aux transformées de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 38 (FAR 130)**.** La transformée de Fourier de f est la fonction notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}f(x)dx$.

Exemple 39 (No ref, prémice ex FAR 130)**.** La tranformée de Fourier de la fonction $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ est $\widehat{f}(t) = 2sinc(t)$.

Proposition 40 (FAR 106)**.** [Riemann-Lebesgue] Si f est intégrable sur $]-\alpha,\beta[$, alors la fonction $F(\lambda) := \int_\alpha^\beta e^{i\lambda x}f(x)dx$ converge vers 0 lorsque $|\lambda|$ tend vers l'infini.

Théorème et définition 41 (ELA.F 110+111)**.** $\hat{f}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$ (i.e. $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$).
La transformation de Fourier sur L^1 est l'application de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$. C'est une application linéaire et continue.

Théorème 42 (ELA F 116, FAR 133)**.** Si $\hat{f}$ est intégrable, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\hat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{\hat{f}}}(t)$

Application 43. Fonction de Hermite

Avoir en tête convolution, autre application, mais là pas la place :/