Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2. On considère E un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie $n \geq 2$. E^* désigne le dual de E. $\mathcal{B} := (e_1, .., e_n)$ sera une base de E et on notera $(x_1, .., x_n)$ les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans cette base.

1 Définition et représentation matricielle

1.1 Forme bilinéaire

Définition 1 (ROM 461)**.** forme bilinéaire (f.b.) + sym

Exemple 2 (ROM 464)**.** Les applications $\varphi : (x, y) \in E^2 \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$ et $\phi : (x, y) \mapsto x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ sont des formes bilinéaires.

Définition 3 (ROM 462)**.** La matrice d'une forme bilinéaire φ dans la base $\mathcal{B}$ de E est la matrice carrée d'ordre n, $A = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1\leq i,j\leq n}$

Proposition 4 (ROM)**.** thm 15.1 : $\varphi(x, y) = {}^tXAY$

Proposition 5 (ROM 463)**.** Une f.b. est symétrique ssi sa matrice est symétrique.

Exemple 6 (GOU 241)**.** L'application $\varphi : ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto 3x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - \frac{3}{2}x_1y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1$ est une forme bilinéaire symétrique.

Définition 7 (ROM 463)**.** Le discriminant dans $\mathcal{B}$ d'une forme bilinéaire φ est le déterminant de la matrice $(\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ de φ dans cette base. On le note $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

1.2 Forme quadratique

Définition 8 (ROM 464)**.** On appelle forme quadratique sur E une application $q : E \to \mathbb{K}$ définie par $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$, où φ est une forme bilinéaire sur E.

Notation 9 (ROM 464)**.** On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E. C'est un sev

Proposition et définition 10 (ROM 464)**.** Si q est une forme quadratique sur E, il existe alors une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$. De plus on a, $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))$.
On dit que φ est la forme polaire de q.

Contre-exemple 11. Les deux f.b. de l'exemple 2 donnent la même forme quadratique $q : x \mapsto x_1^2 + x_2^2$. Ceci montre que la symétrie est nécessaire à l'unicité.

Définition 12 (ROM 465)**.** Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ. La matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de sa forme quadratique. De même, le discriminant dans $\mathcal{B}$ de q est celui de φ dans $\mathcal{B}$

Proposition 13 (ROM 465)**.** L'application qui associe à une forme quadratique q sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ réalise un isomorphisme de $Q(E)$ sur $S_n(\mathbb{K})$

Exemple 14 (GOU 241)**.** L'application $q : (x, y, z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ est la forme quadratique de l'exemple 6. Sa matrice associée est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, on considère q une f.q. sur E et φ sa f.p. .

2 Vocabulaire

On considère X une partie non vide de E.

Définition 15 (ROM 465)**.**
1. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dit orthogonaux relativement à φ si $\varphi(x,y) = 0$.
2. L'orthogonal de X relativement à φ est le sous-ensemble de E $X^\perp := \{y \in E | \forall x \in X, \varphi(x,y) = 0\}$.

Proposition 16 (ROM 466)**.**
1. $\{0\}^\perp = E$
2. $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
3. $X \subset (X^\perp)^\perp$
4. Si Y est une autre partie non vide de E telle que $X \subset Y$ alors $Y^\perp \subset X^\perp$

Définition 17 (ROM 466)**.**
1. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est isotrope relativement à φ s'il est orthogonal à lui-même, i.e. $q(x) = 0$.
2. L'ensemble des vecteurs isotropes de E, relativement à φ, est le cône isotrope de φ : $C_\varphi := \{x \in E | q(x) = 0\}$.

Exemple 18 (GRI 305)**.**
1. $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ alors $C_\varphi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = \pm x_2\}$ (cf figure 1).
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ alors $C_\varphi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ (cf figure 2).

Définition 19 (ROM 466)**.** Le noyau de φ est l'orthogonal de E :

$$ker(\varphi) := \{y \in E | \forall x \in E, \varphi(x,y) = 0\}$$

Définition 20 (ROM 467)**.** Le rang de φ (resp. de q) est l'entier $rg(q) = n - dim(ker(q))$.

ORal : important car donne méthode de démonstration : récurrence sur le rang

Définition 21 (ROM 467)**.** On dit que la f.b.s. φ (resp. la f.q. q) est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Définition 22 (ROM 467)**.** On dit que la f.q. q est définie si $q(x) \neq 0, \forall x \in E \setminus \{0\}$.

i.e. si son cône isotrope est réduit à $\{0\}$

Proposition 23 (ROM 468)**.** [DEV1] $dim(F) + dim(F^\perp) \geq dim(E)$ pour tout sev F de E avec égalité pour q non dégénrée.
$E = F \oplus F^\perp$ est réalisée ssi la restriction de q est non dégénérée.

3 Réduction de Gauss

Théorème 24 (ROM 469)**.** Pour toute forme quadratique non nulle q sur E, il existe un entier r compris entre 1 et n, des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ et des formes linéaires $(l_i)_{1 \leq i \leq r}$ linéairement indépendantes dans E^* tels que $q(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_i l_i^2(x)$ pour tout $x \in E$.

Méthode 25 (ROM 470, GRI 308)**.** cf annexe (mettre algo en annexe si le temps)

Exemple 26 (GRI 308)**.** Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la f.q. définie par $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$. Après réduction, on obtient $q(x) = -\frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{18}{5}x_3^2$.

Théorème et définition 27 (ROM 473)**.** Avec les notations précédentes, il existe une base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale $D = diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$. Si $r = rg(q)$, alors les r premiers termes diagonaux sont non nuls et les suivants nuls.
Une telle base est dite orthogonale relativement à la forme quadratique q

4 Classification des formes quadratiques

On considère toujours q une f.q. sur E.

4.1 Sur $\mathbb{C}$

Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 28 (GRI 310)**.** Il existe une base $(e_i)_i$ telle que la matrice de q dans cette base soit $\begin{pmatrix} I_{rg(q)} & 0_{rg(q),n-rg(q)} \\ 0_{n-rg(q),rg(q)} & 0_{n-rg(q)} \end{pmatrix}$.

Corollaire 29. Il existe une base othonormée ssi $rg(q) = n$.

4.2 Sur $\mathbb{R}$

Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Définition 30 (ROM 475, faire en 2 pour + claire mais ajouter négative)**.** 1. Une forme quadratique réelle $q \in Q(E)$ est dite positive (resp. négative) si $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$) pour tout $x \in E$.

2. Une forme quadratique réelle $q \in Q(E)$ est dite définie positive (resp. définie négative) si $q(x) > 0$ (resp. $q(x) < 0$) pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

analogue avec matrice associée

Proposition 31 (ROM 475)**.** [Cauchy Schwarz] Si q est une forme quadratique positive, on a alors

$$|\varphi(x,y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}, \forall x, y \in E$$

égalité si x, y colinéaire. Cas def pos, égalité ssi x, y colinéaire

Théorème et définition 32 (ROM 476)**.** Il existe un unique couple (s,t) d'entiers naturels tel que pour toute base q-orthogonale $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E, on ait : $s = card(\{i \in [\![1,n]\!] | q(e_i) > 0\})$ et $t = card(\{i \in [\![1,n]\!] | q(e_i) < 0\})$. En particulier, $s + t = rg(q)$.
On appelle signature de q le couple (s,t).

Théorème 33 (ROM 477)**.** Notons $\mathcal{P}$ (resp $\mathcal{N}$) l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels F de E tels que $q_{|F}$ soit définie positive (resp. définie négative). La signature (s,t) est donnée par : $s = \max\limits_{F\in\mathcal{P}} dim(F)$ et $s = \max\limits_{F\in\mathcal{N}} dim(F)$ avec la convention $\max \emptyset = 0$.

Corollaire 34 (GRI 312)**.** 1. q est définie positive $\iff$ $sign(q) = (n, 0)$

2. q est définie négative $\iff$ $sign(q) = (0, n)$
3. q est non dégénérée $\iff$ $sign(q) = (p, n-p)$

Avoir en tête cas 1 : définie positive iff E euclidien ; $sign(n, 0)$ iff existe base orthonormées

4.3 Sur $\mathbb{F}_q$

Soit p un nombre premier impair, $q = p^m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{F}_q$ un corps de caractéristique p. On suppose φ non nulle de rang r. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$ qui n'est pas un carré.

Théorème 35 (ROM 480)**.** Il existe une base de E dans laquelle φ est de la forme $D = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$, avec $\delta \in \{1, \alpha\}$

Définition 36 (ROM 482, dans la demo)**.** Deux formes quadratiques φ et φ' sont dites équivalentes si elles ont la même matrice dans deux base différentes, ce qui revient à dire qu'il existe $u \in GL(E)$ tel que $\varphi = \varphi' \circ u$.

Corollaire 37 (ROM 482)**.** Il y a dans $Q(E)$, $2n+1$ classes d'équivalence, dont deux de formes quadratiques non dégénérées.

Application loi de réciprocité quadratique !

5 Applications

5.1 Un exemple classique sur $M_n(\mathbb{R})$: la trace

Proposition 38 (ROM 491)**.** [Dev 1] L'application $q : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto Tr(M^2)$ est une forme quadratique dont la forme polaire est donnée par $\varphi : (M,N) \mapsto Tr(MN)$. Elle est de rang $dim(M_n(\mathbb{R}))$ et sa signature est $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$

Application 39. $S_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a de plus que $q_{|S_n(\mathbb{R})}$ est définie positive et $q_{|\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$ est définie négative.

5.2 Isométries

[ROM p713] Dans cette partie, on considèrera $(E, <.,.>)$ un espace euclidien réel, toujours de dimension finie n.

Définition 40 (ROMp720)**.** Une isométrie de E est une application $u : E \to E$ qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire telle que $< u(x), u(y) >=< x, y >$ pour tous x, y dans E.

Proposition 41. Soient $B = (e_i)_i$ une base orthonormée de E et $u \in L(E)$ de matrice A dans la base B.
On a les caractérisatoins suivantes :

- u est une isométrie ssi elle transforme B en une base orthonormée de E.
- u est une isométrie ssi ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$.

Corollaire 42. Pour toute isométrie $u \in O(E)$, on a $det(u) = \pm 1$

Définition 43. On appelle groupe orthogonal, et on note $O(E)$, l'ensemble des isométrie de E. On appelle groupe orthogonal spécial, noté $O^+(E)$, le sous-groupe de $O(E)$ des isométries de déterminant 1.

Proposition 44 (ROMp720)**.** $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si elle est linéaire et conserve la norme.

Définition 45 (par coeur par trop ref, un peu PER p125 et un peu ROM p730)**.** Soit $u \in GL(E)$ tel que $u^2 = id$.
On dit que u est une réflexion si $dim(ker(u - id)) = n - 1$, c'est à dire si c'est une symétrie par rapport à un hyperplan.
On dit que u est un retournement si $dim(ker(u - id)) = n - 2$.

Théorème 46 (DEV 2)**.** [PER 143] Le groupe O(E) est engendré par les réflexions. Plus précisément, si u est dans O(E), u est produit d'au plus $r = rg(u - id)$ réflexions.

Théorème 47 (PER 143)**.** [DEV 2] Soit $n \geq 3$. Le groupe $O^+(E)$ est engendré par les renversement. Plus précisément, si u est dans $O^+(E)$, u est produit d'au plus n renversements.