Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit $n, p \geq 1$. [TL1 377]

1 Mise en place du problème

Définition 1 (TL1 377, GRI 37)**.** Un système d'équations linéaires à n équations et p inconnues est un système de la forme

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_2 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les coefficients $a_{i,j}$ et b_i appartiennent à $\mathbb{K}$.
Si tous les b_i sont nuls, le système est dit homogène ou sans second membre.
La matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice du système.

Proposition 2 (TL1 378)**.** Le système (S) de la définition 1 prend la forme matricielle : $AX + B$
où $B = {}^t(b_1, ..., b_n)$ et $X = {}^t(x_1, .., x_n)$

Théorème 3 (TL1 378)**.** Un système linéaire homogène de n équations à n inconnues possède une solution non trivial si et seulement si sa matrice A n'est pas inversible.

Définition 4 (TL1 379, ROM 191)**.** Le système (S) est dit compatible s'il possède au moins une solution et incompatible sinon.

Proposition 5 (TL1 379)**.** LASSE :

1. Le système (S) est compatible
2. B est combinaison linéaire (non trivial) des colonnes de A

Proposition 6 (no ref)**.** Supposons $A = 0_{n,p}$.

Si $B = 0_{n,1}$ alors tout vecteur X est solution du système.

Si $B \neq 0_{n,1}$ alors le système n'a pas de solution.

2 Techniques de résolutions dans des cas précis

On considère jusqu'à la fin de ce cours un système linéaire (S) à n équations et p inconnues. On note A la matrice associée à ce système.

2.1 Méthode de Cramer

Définition 7 (TL1 379)**.** Le système (S) est appelé système de Cramer si $n = p$ et si A est inversible.

Théorème 8 (TL1 380)**.** Supposons que (S) soit un système de Cramer. Il possède alors une unique solution $X \in \mathbb{K}^n$, qui est $X = A^{-1}B$. Ses coefficients x_j vérifient, pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$x_j = \frac{det(C1, ..., C_{j-1}, B, C_{j+1}, ..., C_n)}{det(A)}$$

où C_i est donnée par la i-ème colonne de A.

Exemple 9 (TL1 380)**.** Considérons le système

$$(S):\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+4y+9z=1 \\ 3x-4y+2z=1 \end{cases}$$

La matrice associé à ce système est $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 9\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}$, en particulier $det(A)=1\neq 0$ donc il existe une unique solution à ce système. Cette dernière est donnée par :
$x=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=29$, $y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 9\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=15$ et $z=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix}=-13$

Remarque 10 (TL1 381)**.** Intérêt essentiellement théorique car coût plus élevé que de résoudre le système par pivot de Gauss.

2.2 Matrices échelonnées et méthode de remontée

Définition 11 (ROM 187)**.** On dit que A est échelonnée en ligne si elle est nulle ou si il existe $r\in[\![1,n]\!]$ tel que les lignes L_i de A vérifient :

1. $L_i\neq 0, \forall 1\leq i\leq r$
2. $L_i=0, \forall i\geq r+1$
3. $1\leq d_1<d_2<..<d_r\leq p$ où $d_i:=\min\{1\leq j\leq p|a_{ij}\neq 0\}$

Les coefficients a_{i,d_i} sont appelés les pivots de la matrice échelonnée A.

Exemple 12 (GRI 39)**.** La matrice $\begin{pmatrix}2&3&1&0&1&2&6\\0&0&7&1&8&2&0\\0&0&0&0&0&6&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ est échelonnée, mais ce n'est pas le cas de $\begin{pmatrix}1&3&1&0&1&5&9\\0&0&7&1&8&2&0\\0&0&5&1&0&6&2\\0&0&0&3&2&1&5\end{pmatrix}$

Proposition 13 (ROM 187)**.** Avec les notations précédente, une matrice A non nulle échelonnée en lignes est de rang r (qui correspond au nombre de lignes non nulles).

Définition 14 (ROM 188)**.** On dit qu'un système linéaire $AX=b$ est échelonné si la matrice A est échelonnée en lignes.

Algorithme 15 (ROM 193)**.** [m–>p] Supposons que l'on est un système échelonnée, où l'on a supprimé les lignes et colonnes nulles, et avec avec tous les $a_{i,i}\neq 0$ pour tou $1\leq i\leq r$. Trois cas de figures sont possibles :

1. Cas 1 on a un système triangulaire supérieur $(r=n=p)$: un tel système a une unique solution et se résout par a méthode de "remontée". L'algorithme suivant donne une expression de celle-ci :
   (a) $x_n=\frac{b_n}{a_n}$
   (b) Pour i allant de $n-1$ à 1, on construit successivement $x_i=\frac{1}{a_{i,i}}(b_i-\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i,j}x_j)$
2. Cas 2 on a une système de $r\leq n$ équations et $r<p$ inconnues de la forme :
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+...+a_{1,r}x_r+a_{1,r+1}x_{r+1}+...a_{1,p}x_p & =b_1\\ a_{2,2}x_2+...+a_{2,r}x_r+a_{2,r+1}x_{r+1}+...+a_{1,p}x_p & =b_2\\ ... & \\ a_{r,r}x_r+a_{r,r+1}x_{r+1}+...+a_{r,p}x_p & =b_r\end{cases}$$
   Les r premières inconnues sont appelées inconnues principales et les autres inconnues non principales. Les inconnues non principales sont alors utilisées comme paramètres en second membre et on résout le système aux inconnues principales $x_1,..,x_r$. L'ensemble des solutions est alors un espace affine de dimension $n-r$.
3. Cas 3 on a un système de n équations à $r=p<n$ inconnues de la forme
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+...a_{1,p}x_p & =b_1\\ a_{2,2}x_2+...+a_{1,p}x_p & =b_2\\ ... & \\ a_{p,p}x_p & =b_p\\ 0 & =b_{p+1}\\ ... & \\ 0 & =b_n\end{cases}$$

Si l'un des $b_i = 0$ pour i compris entre $m+1$ et n, alors ce système n'a pas de solution. Or si tous ces b_i sont non nuls, le système restant, appelé système aux équations principales, est ramené au cas 1.

3 Se ramener à une matrice échelonnée

3.1 Méthode du pivot de Gauss

Proposition 16 (GRI 37)**.** L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si l'on effectue sur les équations les opérations élémentaires suivantes :

1. changer l'ordre des équations
2. multiplier une équation par un scalaire non nul
3. ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres équations

Proposition 17 (un peu Rom 193)**.** En effectuant les opérations énnoncé dans la proposition précédemment, on peut se ramener à un système échelonné où aucune colonne n'est nul.

On peut aussi le voir avec matrice de dilatation, permutation et les classes d'équivalence.

Méthode 18 (Méthode de résolution d'un système d'équations linéaires)**.** On échelonne la matrice grâce aux opérations élémentaires, puis on se ramène à la partie précédente.

Exemple 19 (GRI 40, mettre ex4 GRI si il y a la place le vrai jour)**.** Considérons le système

$$(S2) : \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \\ 4x+11y=37 \end{cases}$$

En faisant les opérations $L2 \leftarrow L2-L1$, $L3 \leftarrow L3-2L1$ et $L4 \leftarrow L4-4L1$ on se ramène au système

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+4z=7 \\ y+2z=5 \\ 3y+12z=21 \end{cases}$$

, puis en faisant $L3 \leftarrow L3-L2$ et $L4 \leftarrow L4-3L2$ on obtient le système

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+4z=7 \\ 2z=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

On se trouve dans le 3ème cas de l'algorithme, et on est ensuite ramené à la résolution du système

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+4z=7 \\ 2z=2 \end{cases}$$

par la méthode de remontée. L'unique solution de $(S2)$ est alors $z=1$; $y=3$ et $x=1$.

3.2 Utilité de la décomposition LU

Cas particulier restrictif : matrice carrée qui vérifie condition sur ses mineurs

Définition 20 (CAL 78, ROM 690)**.** Soit k un entier entre 1 et n. Le $k-$ième mineur principal est le déterminant de la sous-matrice A_k correspondant aux k premières lignes et k premières colonnes de A. On le note Δ_k

Définition 21. On dit que la méthode LU fonctionne sur A si il existe une matrice L triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1 et une matrice U triangulaire supérieure telles que $A = LU$.

Théorème 22 (ROM 690)**.** [dem Cal, DEV 1] Soit $A \in Gl_n(\mathbb{K})$. Les déterminants $\Delta_1, ..., \Delta_n$ ne sont pas nuls si et seulement si la méthode LU fonctionne sur A.

Proposition 23 (CAL 79)**.** [DEV 1] Si ces conditions sont satisfaites :

1. le couple (L, U) est unique.
2. La diagonale principale de U est égale à $\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, ..., \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$

Application 24 (TL2)**.** En écrivant $AX = B$ comme $LUX = B$, on est alors ramené à résoudre dans un premier temps $LY = B$ puis $UX = Y$. Ces deux équations donnent directement des systèmes échelonnés.

Nécessite $\frac{2n^3}{3}$ opérations mais idk pq

Définition 25 (TL2 168)**.** Une matrice symétrique A est dite positive si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^tAX \geq 0$.
Elle est dite définie positive si pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X^tAX > 0$.

Proposition 26 (ROM ou TL2 147)**.** [cor LU] Supposons A symétrique avec tous ses déterminants principaux non nuls. Il existe un unique couple (L, D), où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et D est diagonale, telles que $A = LDL^t$

Théorème 27 (ROM 691)**.** Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si et seulement si il existe B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = BB^t$. De plus, si les coefficients diagonaux de B sont positifs, cette décomposition est unique.

Remarque 28 (No ref)**.** Méthode plus efficace que la décomposition LU car elle utilise deux fois moins d'opérations.

Nécessite $\frac{n^3}{6}$ opérations mais idk pq
Garder en tête décompo QR pour les questions

4 Exemple d'applications en géométrie

Exemple 29 (TL1 379)**.** On condière, dans le plan $\mathbb{R}^2$, trois points $M_i := (x_i, y_i)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Alors M_1, M_2, M_3, sont alignés si et seulement si $\delta := \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

On se demande s'il existe une droite D, d'équation $ax + by + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b) \neq (0, 0)$, passant par les trois points donnés. Ceci revient à dire que (a, b, c) est solution du système homogène

$$(S) : \begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

Ce système est à 3 équations et 3 inconnues donc il possède une solution non trivial si et seulement si son déterminant δ est nul.

Application 30. [DEV 2] Par 5 points passent une conique.

Elle est unique si et seulement si 4 points parmi ces 5 ne sont pas alignés.

Elle est non dégénérée si et seulement si 3 points parmi ces 5 ne sont pas alignés.