Leçon 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$ On notera $\|.\|$ la norme associé au produit scalaire $<.,.>$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Prérequis

Définition 1 (ROM 713)**.** Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie positive.

Définition 2 (ROM713)**.** Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemple 3 (No ref)**.** $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire usuelle $<.,.>$: $(x,y) \mapsto \sum x_i y_i$ est un espace euclidien.

Proposition 4 (ROM 643, GOU 172 modifier, ROM 139)**.** Pour une base $\mathcal{B}$ de E choisie, l'application qui à un endomorphisme de E associe sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Endomorphisme adjoint

Lemme 5 (ROM 718)**.** Pour toute forme linéaire ℓ sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $l(x) =< x, a >$ pour tout $x \in E$.

Proposition et définition 6 (ROM 718)**.** Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $< u(x), y >=< x, u^*(y) >$ pour tout x, y dans E.
On dit alors que u^* est l'adjoint de u.

Peut être def dans un espace préhilbertien mais on n'a pas l'assurance de l'existence. De même on peut étendre à espace hermitien.

Exemple 7 (NO ref, Jouaucon)**.** L'adjoint d'une homothétie est elle-même. En effet, si $u = \lambda id_E$, on a pour tout $x, y \in E$
$< u(x), y >=< \lambda x, y >= \lambda < x, y >=< x, \lambda y >$.

Proposition 8 (TL2 208, ROM 719)**.** Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t Mat_{\mathcal{B}}(u)$. En particulier $rg(u) = rg(u^*)$ et $det(u) = det(u^*)$.

Proposition 9 (TL2 263, ROM 719)**.**

$(Id_E)^* = Id_E$.

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(uv)^* = v^* u^*$

Si $u \in GL(E)$, $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

Proposition 10 (ROM 719, TL2 209)**.** $ker(u^*) = (Im(u))^\perp$ et $Im(u^*) = (ker(u))^\perp$

Proposition 11 (ROM 719)**.** Rapp.jury : mettre en avant ! Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

3 Endomorphisme normal et réduction

Définition 12 (ROM 743)**.** On dit que u est un endormophisme normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Proposition 13 (ROM 743)**.** Soit A la matrice associée à u dans une base $\mathcal{B}$ fixé.
u est normal si et seulement si ${}^tAA = A^tA$.

Exemple 14 (NO ref, Ewna)**.** L'endomorphisme associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est normal.

Proposition 15 (ROM 743, BER 98)**.** Soit u un endomorphisme normal. Si F est un espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u et u^*. De plus, $u_{|F}$,$u_{|F^\perp}$, $u^*_{|F}$ et $u^*_{|F^\perp}$ sont normaux. même chose avec isométrique, symétrique

Proposition 16 (ROM 758)**.** u est normal si et seulement si $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Lemme 17 (ROM 743 , BER 106)**.** Il existe un sous-espace vectoriel P de E de dimension 1 ou 2 stable par u. i.e. une droite ou un plan

Lemme 18 (ROM 744, BER 107)**.** Soit u un endomorphisme normal de E de dimension 2. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice représentative de u est soit diagonale soit de la fomre $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$.

Théorème 19. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & ... & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & a_1 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & .... & & \\ & & & & & & a_s & b_{-s} \\ & & & & & & b_s & a_s \end{pmatrix}$$
où $r, s \geq 0$ sont des entiers vérifiant $r + 2s = n$, $\lambda_i, a_j \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{R}^\times$, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $j \in [\![1, s]\!]$.

Corollaire 20. Soit u un endomorphisme antisymétrique. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & ... & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & 0 & & & \\ & & & & & .... & & \\ & & & & & & 0 & b_{-s} \\ & & & & & & b_s & 0 \end{pmatrix}$$
où $s \geq 0$ est un entier et $b_j \in \mathbb{R}^\times$, $j \in [\![1, s]\!]$.

4 Le groupe orthogonal

4.1 Généralités

Définition 21 (ROMp720)**.** Une isométrie de E est une application $u : E \to E$ qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire telle que $< u(x), u(y) >=< x, y >$ pour tous x, y dans E.

Définition 22. On appelle groupe orthogonal, et on note $O(E)$, l'ensemble des isométrie de E.

Exemple 23 (ROM 720)**.** Pour E de dimension 1, on a $O(E) = \{-Id, Id\}$.

Proposition 24 (ROMp720)**.** $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si elle est linéaire et conserve la norme.

On en déduit que vp réelle possible d'une iso sont -1 et 1

Proposition 25 (ROMp162,721)**.** Une isométrie est un automorphisme de E et $O(E)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$.

Proposition 26 (ROM 722,723)**.** Soient $B = (e_i)_i$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans la base B. On a les caractérisations suivantes :

— u est une isométrie ssi elle transforme B en une base orthonormée de E.

— u est une isométrie ssi ${}^tAA = A^tA = I_n$.

Corollaire 27. Pour toute isométrie $u \in O(E)$, on a $det(u) = \pm 1$

Définition 28 (ROM p724)**.** On appelle groupe orthogonal spécial, noté $O^+(E)$, l'ensemble des isométrie de déterminant 1.

Proposition 29. $O^+(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$.

4.2 Générateurs

Définition 30 (BER 101,104 par coeur par trop ref, un peu PER p125 et un peu ROM p730)**.** Soit $u \in GL(E)$ tel que $u^2 = id$.
On dit que u est une réflexion si $dim(ker(u - id)) = n - 1$, c'est à dire si c'est une symétrie par rapport à un hyperplan.
On dit que u est un retournement si $dim(ker(u - id)) = n - 2$.

Théorème 31 (DEVELOPPEMENT 1)**.** [BER 102, ROM 731, PER 143] Le groupe O(E) est engendré par les réflexions. Plus précisément, si u est dans O(E), u est produit d'au plus $r = rg(u - id)$réflexions.

Théorème 32 (BER 104, PER 143)**.** Soit $n \geq 3$. Le groupe $O^+(E)$ est engendré par les renversement. Plus précisément, si u est dans $O^+(E)$, u est produit d'au plus n renversements.

4.3 Réduction

Corollaire 33 (ROM 727, BER 111)**.** Soit $u \in O(E)$ .Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit : $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & & & . \\ . & 0 & R_1 & 0 & & . \\ . & & 0 & R_2 & 0 & . \\ . & & & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & R_r \end{pmatrix}$ où pour tout $k \in \{1, ..., r\}$, on a noté $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \in]0, 2\pi[\backslash\{\pi\}$ et p, q, r sont des entiers naturels tels que $p + q + 2r = n$.

On a $p = dim(ker(u - id))$ et $q = dim(ker(u + id))$.

Proposition 34 (ROM 728)**.** Avec les notations précédentes, $u \in O^+(E)$ si et seulement si q est pair.

Relire corollaire BER 111, interprétation : une iso d'un espace euclidien se décompose en produit de réflexions orthogonales et de rotations planes.

5 Endomorphismes symétriques

On considère $u \in \mathcal{L}(E)$.

5.1 Généralités

Définition 35 (ROM 732)**.** On dit que u est un endomorphisme symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$, ce qui revient à dire que :

$$\forall (x, y) \in E \times E, < u(x), y >=< x, u^*(y) >$$

Notation 36 (ROM 732)**.** On note $S(E)$ l'ensemble de tous les endomorphismes symétriques de E.

Théorème 37 (ROM 732)**.** u est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Proposition 38 (ROM 733)**.** $u + u^*, u^*u$ et uu^* sont dans $S(E)$.

1ère réduction, pas dans V car besoin pour dem de certaines dem et fournit la partie

Proposition 39 (ROM 734)**.** Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles

Théorème 40 (ROM 734)**.** [théorème spectral] Tout endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

5.2 Endomorphismes symétriques (définis) positifs

Définition 41 (ROM 735)**.** On dit que u est dit symétrique positif (resp. défini positif) s'il est symétrique avec $< x, u(x) > \geq 0$ pour tout $x \in E$ (resp. $< x, u(x) >> 0$ pour tout $x \in E$).

Notation 42 (ROM 735)**.** On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs et $S^{++}(E)$ ceux définis postifs.

Théorème 43 (ROM 736)**.** $u \in S^+(E) \iff$ toutes ses valeurs propres sont positives.

Définition 44 (ROM 735)**.** Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (resp. définie positive) si elle est symétrique avec ${}^tXAX \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ (${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$).

Notation 45 (736)**.** On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ celles définies positives.

Théorème 46 (ROM 737)**.** Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

idée d'application : L'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Application 47. [DEV 2] $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n(R)^{++}$ est un homéomorphisme.

Avoir déf + réduction antisym en tête