Leçon 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

On considère $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Prérequis

Proposition 1 (GOU 172 modifier, ROM 139)**.** Pour une base B de E choisie, l'application qui à un endomorphisme de E associe sa matrice représentative dans la base B est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 2. Cette proposition nous permettra de faire le lien entre matrice et endomorphisme tout au long de cette leçon.

Pendant présentation dire que c'est pour ça que nos exemples sont essentiellement des matrices, on peut leur associé un endo.

1.1 Polynôme minimal et caractéristique

Proposition/Définition 3 (BER 946 947)**.** $Ann(u) := \{P \in \mathbb{K}[X] | P(u) = 0\}$ est un idéal non nul et il existe un unique polynôme unitaire $\mu_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Ann(u) = \{\mu_u Q | Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Ce polynôme est appelé polynôme minimal de u.

Définition 4 (BER 948, inv pour coller avec mes réflexes)**.** On appelle polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$.

Définition 5 (BER 950)**.** On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de la matrice de u dans n'importe quelle base de E. On le note χ_u.

Théorème 6 (BER 950)**.** [Cayley Hamilton] $\chi_u(u) = 0$

Proposition 7 (BER 953)**.** χ_u et μ_u ont les mêmes racines dans $\mathbb{K}$.

1.2 Valeurs propres et sous-espaces propres

Définition 8 (BER 958)**.** On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur $x \in E$ est alors appelé un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Définition 9 (BER 958)**.** L'ensemble des valeurs propres de u est appellé le spectre de u, noté $Sp(u)$.

Proposition 10 (BER 958)**.** λ est une valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$.

Corollaire 11 (BER 958)**.** $Sp(u)$ est un ensemble fini.

Définition 12 (BER 959)**.** Soit $\lambda \in Sp(u)$. La multiplicité de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_u. Autrement si, c'est le plus grand entier $m \geq 1$ tel que $(X - \lambda)^m$ divise χ_u. On la notera m_λ.

Définition 13 (BER 958)**.** Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est le sous-espace vectoriel $E_\lambda = ker(u - \lambda id_E)$.

Proposition 14 (BER 959)**.** Soit $\lambda \in Sp(u)$. On a $1 \leq dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.

Proposition 15 (BER 959)**.** Les sous-espaces propres sont en somme directe.

2 Endomorphisme trigonalisable

Définition 16 (ROM, TL2, BER 961)**.** On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

Définition 17 (ROM 675)**.** On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 18 (ROM 676, GOU 174)**.** u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Exemple 19. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$, puisque son polynôme caractéristique est $X^2+1=(X-i)(X+i)$.

Corollaire 20 (ROM 676, TL2 313)**.** Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

Exemple 21. Sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable.

Proposition 22 (TL2 678, vient après corollaire)**.** [besoin pour dem nilp] Tout endomorphisme annulé par un polynôme scindé est trigonalisable.

Proposition 23 (ROM 676)**.** Si u est trigonalisable alors la trace de u est égale à la somme des valeurs propres de u et le déterminant de u est égal au produit des valeurs propres de u.

Application 24 (ROM 762)**.** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $det(e^A)=e^{tr(A)}$ et e^A est inversible.

Proposition 25 (ROM 676)**.** Si u est trigonalisable et si F est un s.e.v. stable par u, alors l'endomorphisme $u_{|F}$ est trigonalisable.

Proposition 26 (ROM 678)**.** [trigonalisation simultanée] Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de E qui commutent deux à deux. Alors il existe une base commune de trigonalisation dans E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$.

3 Endomorphisme nilpotent

3.1 Généralités

Définition 27 (ROM 648)**.** u est dit nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{q-1} \neq 0$ et $u^q = 0$.
On dit que q est l'indice de nilpotence de u.

Définition 28 (TL2 321)**.** A est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k=0$

Proposition 29 (TL2 321, ajouter - pour aller avec ma def)**.** u est nilpotent si et seulement si son polynôme caractéristique est égale à $(-X)^n$.

Proposition 30 (ROM 648)**.** [=> toujours, alg clos <=] Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, u est nilpotent si et seulement si 0 est la seule valeur propre

Proposition 31 (ROM 649)**.** Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle : u est nilpotente si et seulement si $Tr(u^k)=0$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Contre-exemple 32 (ROM 649)**.** L'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, où $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, a pour seule valeur propre réelle 0, et pour tout $q \geq 1$ $A^q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q\theta) & -\sin(q\theta) \\ 0 & \sin(q\theta) & \cos(q\theta) \end{pmatrix} \neq 0_3$, donc il n'est pas nilpotent. Ceci montre que le critère algébriquement clos est indipensable.

Proposition 33. A est nilpotente si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire stricte.

Contre-exemple 34 (OA 168)**.** [Je ne sais pas où le mettre mais intéressant] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est le produit de deux matrices nilpotentes mais n'est pas nilpotente.

3.2 Décomposition de Dunford

Théorème 35 (GOU 205, modifier pour mieux dans leçon)**.** [DEV 1] Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

1. d soit diagonalisable et n soit nilpotente
2. d et n commutent
3. $a = d + n$

Application 36 (GOU 206)**.** Un intérêt est le calcul d'exponentielle matrices. Grâce à la commutativité de d et n, on a $exp(u) = exp(d) \times exp(n)$. Notons que d étant diagonalisable, $exp(d)$ est facile à calculer, et n étant nilpotente, $exp(n) = \sum_{p=0}^{q-1} \frac{n^p}{p!}$ où q est son indice de nilpotence.

Corollaire 37 (ROM 765, 767)**.** [DEV 1] Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique est scindé. A est diagonalisable si et seulement si $exp(A)$ est diagonalisable.

Exemple 38 (no ref)**.** Prenons $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour décomposition de dunford $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$exp(A_1) = \begin{pmatrix} exp(3) & 0 \\ 0 & exp(3) \end{pmatrix} \times \left(I + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

4 Noyaux itérés et réduction de Jordan

Dans cette partie, on suppose que u est nilpotent d'indice r.

Lemme 39 (BER 977)**.** [DEV 2 noyaux itérés] On a :

1. $\forall i \in [\![1, r]\!], Ker(u^{i-1}) \subsetneq Ker(u^i)$
2. $\forall i \geq r$, $Ker(u^i) = Ker(u^r) = E$

Lemme 40 (BER entre les lignes)**.** [DEV 2] Il existe des sous-espaces vectoriels $F_{r+1}, ..., F_0$ de E tels que, pour tout $i \in [\![1, r+1]\!]$:

1. $ker(u^i) = ker(u^{i-1}) \oplus F_i$
2. $u(F_i) \subset F_{i-1}$

Proposition 41 (BER)**.** Revoir ! ! Il existe une base dans laquelle A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & J_{d_1} & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & J_{d_r} \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$ où

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & 0 \\ . & & & & . & 1 \\ 0 & . & . & . & & 0 \end{pmatrix} \in M_d(\mathbb{R}) \ .$$

Théorème 42 (GOU 209)**.** Si $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & A_2 & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & A_s \end{pmatrix}$ où $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & v_{i,\alpha_i - 1} \\ 0 & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ pour tout i

Application 43. Cette décomposition permet de calculer les puissances et exponentielles de matrices.

Permet de retoruver décomposition de Dunford, comme brut sépare terrme diag et terme sur diag et donne la déc.

Exemple 44 (no ref :( )**.** Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont 3 et 2 et $\chi_A(X) = (3 - X)(2 - X)^2$. De plus $ker(A - 2I) = Vect((1, 1, -3))$ donc A n'est pas diagonalisable et la réduction de Jordan de A est donc $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour calculer les puissances ou l'exponentielle de A, on se ramène à la décomposition de Dunford $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.