Leçon 155 : Exponentielle de matrices. Applications.

On désignera par $\mathbb{K}$ le coprs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \geq 0$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Définition et premières propriétés

Attention dans BER norme avec qu'une seul barre, mettre 2 j'aime mieux

Définition 1 (BER 989, ROM 759). On considère par $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définit, par

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

où les $(a_{i,j})_{i,j}$ sont les coefficients de A.

Proposition 2 (BER 989).

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Proposition 3 (BER989). La série $\sum_{m \leq 0} \frac{A^m}{m!}$ est convergente.

Définition 4 (BER 990). On définit alors l'exponentielle de A par

$$exp(A) = e^A = \sum_{m \leq 0} \frac{A^m}{m!}$$

Proposition 5 (ROM 761). La fonction $exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

Exemple 6 (ROM 761). $e^{0_n} = I_n$

Proposition 7 (BER 990, TL2 350, ROM 761 no ref (2 derniers)). L'exponentielle de matrice vérifie les propriétés suivantes :

1. A et e^A commutent
2. si A et B commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B$
3. e^A est inversible d'inverse e^{-A}
4. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$
5. $det(e^A) = e^{Tr(A)}$
6. Si A et B sont semblables, alors e^A et e^B sont semblables
7. $\overline{e^M} = e^{\overline{M}}$
8. ${}^t(e^M) = e^{{}^tM}$

Proposition 8 (TL2 351). $exp(A)$ est un polynôme en A.

Attention, polynome en A, pas polynomiale en A car le polynome dépend de A

2 Méthode de calcul

2.1 Cas des matrices diagonalisable

Proposition 9 (no ref, idée BER 993). Soit $D = diag(d_1, ...d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Alors $exp(D) = diag(e^{d_1}, ..., e^{d_n})$.

Exemple 10 (ROM 761). $e^{I_n} = e^1 I_n$

Proposition 11 (no ref, idée BER 993). Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, ...\lambda_n$ telle que $A = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$ et on a alors $exp(A) = Pdiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})P^{-1}$.

Exemple 12 (TL2 351). $C = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ est a pour valeurs propres $\pm i\pi$. Elle est donc diagonalisable et il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $C = P^{-1} \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} P$. Ainsi $exp(C) = P \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} P^{-1} = -I_2$.

Proposition 13. Si A est nilpotente d'indice n, $exp(A) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{N^m}{m!}$.

Exemple 14 (TL2 351)**.** Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$.
$exp(A) = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & -\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $exp(B) = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix}$.
Remarquons que $A + B$ est égale à la matrice C de l'exemple 12 mais que

$$exp(A)exp(B) = \begin{pmatrix} 1-\pi & -\pi \\ \pi & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci donne un contre exemple au fait que $e^A e^B = e^{A+B}$ si A et B ne commutent pas.

2.2 Décomposition Dunford

Attention rapport jury 2003, [OA] : ne facilite pas le calcul car décomposition de dunford elle même pas évidente à obtenir

Théorème 15 (GOU 205, modifier pour mieux dans leçon)**.** [DEV 1] Si χ_A est scindé qur $\mathbb{K}$, il existe un unique couple (D, N) de matrices tels que :

1. D soit diagonalisable et N soit nilpotente
2. D et N commutent
3. $A = D + N$

Application 16 (GOU 206)**.** Si la décomposition de Dunford de A est $A = D + N$, on a $exp(A) = exp(D) \times exp(N)$.

Corollaire 17 (ROM 765, 767)**.** [DEV 1] Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique est scindé. A est diagonalisable si et seulement si $exp(A)$ est diagonalisable.

Exemple 18 (no ref)**.**
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour décomposition de Dunford $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,
$exp(A) = \begin{pmatrix} exp(3) & 0 \\ 0 & exp(3) \end{pmatrix} \times \left(I + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

3 Injectivité et surjectivité

3.1 Cas complexe

Définition 19 (BER 989, ROM 759, cf TL2 492)**.** On considère par $\|.\|_2$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

éventuelle question : normalement défini comme sup norme 2 Av diviser par celle de v, mais ici pas important, juste outils pour les calculs (dev2) et déf

Proposition 20 (ROM 767)**.** Si $\rho(A) < 1$, la série $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$ est convergente.

Définition 21 (TL2 ou ROM 767)**.** Si $\rho(A) < 1$, on définit alors la fonction logarithme matriciel par

$$\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$$

Proposition 22. Si $\rho(A) < 1$, $\ln(I_n + A)$ est un polynôme en A.

Proposition 23 (ROM 767)**.** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < 1$, on a $e^{\ln(I_n+A)} = I_n + A$

Théorème 24 (BER 993)**.** L'exponentielle de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ est surjective. Plus précisément, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = e^{P(A)}$.

Corollaire 25. Pour toute matrice A inversible, et tout $n \geq 1$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = Q(A)^n$.

Application 26 (770)**.** Le théorème 24 nous permet de retrouver le fait que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.

Contre-exemple 27 (ROM 770)**.** Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $exp(2ik\pi) = I_n$ Cette exemple montre que l'exponentielle de matrice définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas injective.

3.2 Cas réelle

Proposition 28. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $e^A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exemple 29 (ROM 779)**.** La matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de déterminant
1. Si il existait $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $B = e^A$, alors $tr(A) = 0$. Elle ne peut pas être trigonalisable dans $\mathbb{R}$ sinon $x = e^{-1}$ aurait une solution dans $\mathbb{R}$. Les valeurs propres A sont donc de la forme $i\mu$ et $-i\mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$.
Si $\mu \neq 0$ on arrive à $e^A = B$ est diagonalisable, et si $\mu = 0$, on arrive à $tr(A) = -2$; donc dans tous les cas on obtient une absurdité. B n'a donc pas d'antécédent pour l'exponentielle de matrice. Ceci conduit à la propriété suivante.

Proposition 30. L'exponentielle de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $GL_2(\mathbb{R})$ n'est pas surjectif.

Théorème 31 (BER 1000)**.** On a $e^{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \{M^2 | M \in GL_n(\mathbb{R})\}$

Théorème 32 (CAL)**.** [DEV2] L'exponentielle de matrice est un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

4 Application aux systèmes d'équations linéaires à coefficients constants

Proposition 33 (GOU 380)**.** L'équation différentielle $(H) : Y' = AY$ a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$, et la solution prenant une valeur donnée $V_0 \in \mathbb{K}^n$ en $t = 0$ est $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n ; t \mapsto e^{tA} V_0$.

Exemple 34 (no ref :(()**.** On s'intéresse au système d'équation différentielle :

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$$

On peut voir ce système comme $Y' = AY$ où $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $\chi_A(X) = -(X-1)^3$. Le théorème de Cayley Hamilton nous donne alors $\chi_A(A) = 0$, c'est à dire $B^3 = 0$ en posant $B = A - I$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$exp(tB) = I_3 + Bt + \frac{t^2}{2} B^2$$

Comme I_3 et $A - I_3$ commutent on a finalement $exp(tA) = exp(tI)exp(tB) = e^t(I_3 + Bt + \frac{t^2}{2}B^2)$. Ainsi, si $Y(0)$ est fixé dans $\mathbb{K}^n$, la solution maximales est définie par $V(t) = e^t(I_3 + Bt + \frac{t^2}{2}B^2)V(0)$.