# Leçon 154 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

## 1 Prérequis

### 1.1 Éléments propres

Attention faire avec matrice A pas endo f pour que ce soit cohérent avec leçon

**Définition 1** (ROM 644)**.** On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $Ax = \lambda x$.
On dit que $x$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre de $\lambda$ et que le sous-espace propre associé à $\lambda$.

**Définition 2** (ROM 644)**.** L'ensemble des valeurs propres de $A$ est appelé le spectre de $A$ nota $Sp(A)$.

**Définition 3** (GOU 171, cf ROM car ici avec f et pas A)**.** Soit $\lambda \in Sp(A)$. L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E | Ax = \lambda x\} = ker(A - \lambda id_E)$ est appelé sous-espace propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.

**Définition 4** (ROM 644, GOU 172)**.** On appelle polynôme caractéristique de $A$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$

**Proposition 5** (GOU p172 mais avec f)**.** $\lambda$ est valeur propre de $A \iff A - \lambda I_n$ n'est pas inversible $\iff \chi_A(\lambda) = 0$

**Définition 6** (GOU 186, pas trop pareil faire gaffe)**.** On définit le polynôme minimal de $A$ le polynôme unitaire de plus bas dégré, non nul, annulant $A$. On le note $\mu_A$.

**Proposition 7** (GOU 186, TL2 299)**.** $\lambda$ est valeur propre de $A \iff \mu_A(\lambda) = 0$

**Théorème 8** (ROM 607, GOU 186)**.** [Théorème de Cayley Hamilton] $\chi_A(A) = 0$

**Corollaire 9** (ROM 607)**.** $\mu_A | \chi_A$

**Définition 10** (TL2 298 )**.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$. On appelle multiplicité de $\lambda$ le plus grand entier $m$ tel que $(X - \lambda I)$ divise $\chi_A$.

**Définition 11** (ROM 611)**.** Soit $\lambda$ une valeur propre de multiplicitée $\alpha$. On appelle sous-espace caractéristique de $A$ le sous espace vectoriel $ker(A - \lambda I)^\alpha$.

**Proposition 12.** Soit $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$ et pour tout $1 \leq i \leq s$, $N_i$ le sous-espace caractéristique associéeà $\lambda_i$. On a alors :

1. $N_i$ stable par $A$ pour tout $1 \leq i \leq s$.
2. $E = N_1 \oplus ... \oplus N_s$
3. $dim(N_i) = \alpha_i$, pour tout $1 \leq i \leq s$

### 1.2 Trigonalisation

**Définition 13** (ROM 675)**.** On dit que $A$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

**Théorème 14** (ROM 676, GOU 174)**.** $A$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$

**Corollaire 15** (ROM 676)**.** Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice de $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ est trigonalisable.

**Exemple 16.** Sur $\mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable.

### 1.3 Diagonalisation

**Définition 17** (ROM 683)**.** On dit que $A$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonalisable.

**Théorème 18** (ROM 683)**.** LASSE :

1. $A$ est diagonalisable

2. $E = \bigoplus_{k=1}^{p} ker(A - \lambda_k I)$
3. $n = \sum_{k=1}^{p} dim(ker(A - \lambda_k I))$
4. $\chi_A$ est scindé de racines $\lambda_k$ chacun de multiplicité $dim(ker(A - \lambda_k I))$
5. $\mu_A$ est scindé

# 2 Premières décompositions ( ou Décomposition à l'aide de sous-espaces stables)

## 2.1 Décomposition Dunford

**Définition 19** (GOU 31)**.** On dit que $A$ est une matrice nilpotente si il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^r \neq 0_n$. On dit que $r$ est l'indice de nilpotence de $N$.

**Théorème 20** (GOU 205, modifier pour mieux dans leçon)**.** [DEV 1] Si $\chi_A$ est scindé qur $\mathbb{K}$, il existe un unique couple $(D, N)$ de matrices tels que :

1. $D$ soit diagonalisable et $N$ soit nilpotente
2. $D$ et $N$ commutent
3. $A = D + N$

**Exemple 21** (no ref)**.**

— $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour décomposition de dunford $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

— Mais attention $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est n'a pas pour décomposition $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car ces deux matrices ne comutent pas. En faite, $A_2$ est déjà diagonalisable donc elle est sa propre décomposition de Dunford.

**Application 22** (GOU 206)**.** Le fait que $d$ et $n$ commutant est intéressant pour calculer des puissances. En effet, le binôme de Newton s'applique et on a : $A^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{k} D^k N^{p-k}$ pour tout $p \leq 0$. De plus pour $i$ plus grand que l'indice de nilpotence de $N$, on a $N^i = 0$. Ainsi cette somme s'arrête au plus à cet indice.

**Exemple 23** (no ref)**.** Reprenons la matrice $A_1$ de l'exemple 21. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est d'indice de nilpotene 2 donc pour tout $p \geq 2$ on a $A_1^p = \begin{pmatrix} 3^p & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix}$

**Application 24** (GOU 206)**.** Un autre intérêt est le calcul de matrices. Toujours grâce à la commutativité de $D$ et $N$, on a $exp(A) = exp(D) \times exp(N)$. Notons que $D$ étant diagonalisable, $exp(D)$ est facile à calculer, et $N$ étant nilpotente, $exp(N) = \sum_{p=0}^{q-1} \frac{N^p}{p!}$ où $q$ est son indice de nilpotence.

**Corollaire 25** (ROM 765, 767)**.** [DEV 1] Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique est scindé. $A$ est diagonalisable si et seulement si $exp(A)$ est diagonalisable.

**Exemple 26** (no ref)**.** Reprenons la matrice $A_1$ de l'exemple 21. $exp(A_1) = \begin{pmatrix} exp(3) & 0 \\ 0 & exp(3) \end{pmatrix} \times \left( I + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

## 2.2 Réduction de Jordan

Pour endo scindé, méthode la plus précise. Idée est de transformer une matrice en matrice diagonale par blocs avec des blocs presques diagonaux. On considère $u$ l'endomorphisme associé à $A$.

**Lemme 27** (BER 977)**.** [ DEV 2 noyaux itérés] Supposons $u$ nilpotent d'indice $q$. On a :

1. $\forall i \in [\![1, r]\!], Ker(u^{i-1}) \subsetneq Ker(u^i)$
2. $\forall i \geq r,\ Ker(u^i) = Ker(u^r) = E$

**Lemme 28** (DEV 2 BER entre les lignes)**.** Supposons $u$ nilpotent d'indice $q$. Il existe des sous-espaces vectoriels $F_{r+1}, ..., F_0$ de $E$ tels que, pour tout $i \in [\![1, r+1]\!]$ :

1. $ker(u^i) = ker(u^{i-1}) \oplus F_i$
2. $u(F_i) \subset F_{i-1}$

**Proposition 29** (BER )**.** [DEV 2 ] Supposons $u$ nilpotent d'indice $q$. Il existe une base dans laquelle $A$ est semblable à une marice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & J_{d_1} & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & & . & J_{d_r} \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ où } J_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & 0 \\ . & & & & . & 1 \\ 0 & . & . & . & & 0 \end{pmatrix} \in M_d(\mathbb{R})\ .$$

**Théorème 30** (GOU 209)**.** Si $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors $A$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & A_2 & & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & A_s \end{pmatrix}$

où $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & & . & v_{i,\alpha_i-1} \\ 0 & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ pour tout $i$

**Application 31.** Cette décomposition permet de calculer les puissances et exponentielles de matrices.

Permet de retoruver décomposition de Dunford, comme brut sépare terrme diag et terme sur diag et donne la déc.

**Exemple 32** ( no ref :( )**.** Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $A$ sont 3 et 2 et $\chi_A(X) = (3-xX)(2-X)^2$. De plus $ker(A-2I) = Vect((1,1,-3))$ donc $A$ n'est pas diagonalisable et la réduction de Jordan de $A$ est donc $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour calculer les puissances ou l'exponentielle de $A$, on se ramène à la décomposition de Dunford $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

# 3 Différentes factorisation

## 3.1 Décomposition LU

**Définition 33** (CAL 78, ROM 690)**.** Soit $k$ un entier entre 1 et $n$. Le $k-$ième mineur principal est le déterminant de la sous-matrice $A_k$ correspondant aux $k$ premières lignes et $k$ premières colonnes de $A$. On le note $\Delta_k$

**Définition 34.** On dit que la méthode $LU$ fonctionne sur $A$ si il existe une matrice $L$ triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1 et une matrice $U$ triangulaire supérieure telles que $A = LU$.

**Théorème 35** (ROM 690)**.** [dem Cal, DEV2] Les déterminants $\Delta_1, ..., \Delta_n$ ne sont pas nuls si et seulement si la méthode $LU$ fonctionne sur $A$.

**Proposition 36** (CAL 79)**.** [DEV 2] Si ces conditions sont satisfaites :

1. le couple $(L,U)$ est unique.
2. La diagonale principale de $U$ est égale à $\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, ..., \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$

**Méthode 37.** Un algorithme pour trouver la décomposition LU est donné en ANNEXE1

**Application 38** (TL2)**.** Cette méthode permet de résoudre des systèmes linéaires. On écrit $AX = B$ comme $LUX = B$. On résoud dans un premier temps $LY = B$ puis $UX = Y$. Ces deux équations donnent des systèmes échelonnés donc plus "simple" à résoudre.

Nécessite $\frac{2n^3}{3}$ opérations mais idk pq

**Application 39.** Le calcul du déterminant est une autre application de cette méthode. $det(L) = 1$ donc $det(A) = det(U)$ et comme $U$ est triangulaire, son déterminant est la somme de ses coefficients diagonaux.

Autre app : calcule de $A^{-1}$. On passe de $n!$ opérations à $n^2$
Si A symétrique variante importante : celle des moindres carrés

## 3.2 Décomposition Cholesky

**Définition 40** (TL2 168)**.** Une matrice symétrique $A$ est dite positive si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^tAX \geq 0$.
Elle est dite définie positive si pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X^tAX > 0$.

**Proposition 41** (ROM ou TL2 147)**.** [cor LU] Supposons $A$ symétrique avec tous ses déterminants principaux non nuls. Il existe un unique couple $(L,D)$, où $L$ est triangulaire inférieure à diagonale unité et $D$ est diagonale, telles que $A = LDL^t$

**Théorème 42** (ROM 691)**.** Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si et seulement si il existe $B$ triangulaire inférieure et inversible telle que $A = BB^t$. De plus, si les coefficients diagonaux de $B$ sont positifs, cette décomposition est unique.

**Méthode 43.** Un algorithme pour trouver la décomposition LU est donné en ANNEXE2

**Application 44** (No ref)**.** Permet comme la méthode $LU$ de résoudre des système linéaires. Cependant elle est plus efficace car elle utilise deux fois moins d'opérations.

Nécessite $\frac{n^3}{6}$ opérations mais idk pq

**Application 45** (No ref)**.** Application déterminant $det(A) = detB)^2$

Garder en tête décompo QR pour les questions