Leçon 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

On se place dans un corps $\mathbb{K}[X]$ commutatif. Soient E un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie $n \geq 1$. On considère un endormorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Différentes notions de la leçon

Proposition 1 (ROM 643, GOU 172 modifier, ROM 139)**.** Pour une base B de E choisie, l'application qui à un endomorphisme de E associe sa matrice représentative dans la base B est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 2. Cette proposition nous permettra de faire le lien entre matrice et endomorphisme tout au long de cette leçon.

1.1 Polynôme minimal et caractéristique

Proposition et définition 3 (BER 946 947)**.** $Ann(u) := \{P \in \mathbb{K}[X] | P(u) = 0\}$ est un idéal non nul et il existe un unique polynôme unitaire $\mu_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Ann(u) = \{\mu_u Q | Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Ce polynôme est appelé polynôme minimal de u.

Définition 4 (BER 948, inv pour coller avec mes réflexes)**.** On appelle polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$.

Définition 5 (BER 950)**.** On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de la matrice de u dans n'importe quelle base de E. On le note χ_u.

1.2 Éléments propres

Cette section on considère E de dimension quelconque (possiblement infinie). On donnera des exemples dans le cas de la dimension infinie. Préciser oral qu'on définit aussi pour matrice est dans ce cas là on est bien évidemment en dim finie.

Définition 6 (BER 958)**.** On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur $x \in E$ est alors appelé un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Géométriquement, ce sont les vecteur qui ne changent pas de direction sous l'action de u

Définition 7 (TL1 370, modif)**.** On appelle vecteur propre de A tout vecteur colonne non nul $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$, où $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est appelé valeur propre.

Définition 8 (BER 958, aj resp A)**.** L'ensemble des valeurs propres de u (resp. de A) est appellé le spectre de u (resp. de A), noté $Sp(u)$ (resp. $Sp(A)$). Lorsqu'il y aura ambiguïté sur le corps, on préviligiera la notation $Sp_{\mathbb{K}}(.)$.

oral : Question qui se pose : comment déterminer les v.p, et une fois fait, commment déterminer sep associé.

Définition 9 (BER 958)**.** Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre de u est le sous-espace vectoriel $E_\lambda = ker(u - \lambda id_E)$.

Exemple 10 (ROM 646)**.**
1. Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $u : f \mapsto f'$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $ker(u - \lambda id) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) | f' = \lambda f\} = \mathbb{R} f_\lambda$ où $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$. Donc $Sp(u) = \mathbb{R}$ et les esapces propres sont les droites.

2. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : P \mapsto XP$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $ker(u - \lambda id) = \{P \in \mathbb{K}[X] | XP = \lambda P\} = \{0\}$. Donc $Sp(u) = \emptyset$. 0 valeur spectrale de u, pas vp

Avoir en tête : rotation d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ a spectre vide et symétrie $\{-1, 1\}$

1.3 Dimension finie

On suppose dans cette sous-partie que E est de dimension n finie.

Proposition 11 (TL2 370)**.** Un scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si $det(u - \lambda id_E) = 0$. De même, un scalaire λ est valeur propre de A si et seulement si $det(A - \lambda I_n) = 0$.

Application 12 (ROM 648)**.** Si u est nilpotent alors 0 est valeur propre de u.

Proposition 13 (TL2 372, 373)**.**

1. Les valeurs propres de A (resp.u) sont les racines de χ_A (resp. χ_u) dans $\mathbb{K}$. même avec pol mininmal.
2. A (resp.u) possède au plus n valeurs propres.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A (resp.u) possède au moins une valeur propre.

Exemple 14 (GRI 160)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $\lambda^2 + 1$. Ainsi, $Sp_{\mathbb{C}} = \{-i, i\}$ mais $Sp_{\mathbb{R}} = \emptyset$. Cette exemple montre que le spectre dépend du corps $\mathbb{K}$ que l'on considère et justifie l'utilité de la notation $Sp_{\mathbb{K}}(.)$.

Définition 15 (BER 959)**.** Soit $\lambda \in Sp(u)$. La multiplicité de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_u. Autrement si, c'est le plus grand entier $m \geq 1$ tel que $(X - \lambda)^m$ divise χ_u. On la notera m_λ.

Théorème 16 (ROM 644)**.** Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u de multiplicité m_λ, on a alors $1 \leq dim(ker(u - \lambda id)) \leq m_\lambda$.

Théorème 17 (ROM 647)**.** Si $Sp(u) = \{\lambda_1, ..\lambda_p\}$, les sous-espaces propres $E_k = ker(u - \lambda_k id)$, pour $1 \leq k \leq n$, sont en somme directe.

Proposition 18. Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles.

de même, mat sym est positive (r. def pos) ssi toutes ses vp sont positives (r. strict pos) par thm spectral

Méthode 19 (GRI 164)**.** Pour chercher les vecteurs propres associés à la valeur propre λ, il faut résoudre le système $(A - \lambda id) = 0$. (au moins une solution non nul car $det(A - \lambda id) \neq 0$).

2 Utilisation des valeurs propres pour la réduction d'endomorphisme

2.1 Trigonalisation

Définition 20 (ROM 675)**.** On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 21 (ROM 676, GOU 174)**.** A est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$

Corollaire 22 (ROM 676)**.** Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable.

Exemple 23. Sur $\mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable.

Proposition 24 (ROM 676)**.** Si u est trigonalisable alors la trace de u est égale à la somme des valeurs propres de u et le déterminant de u est égal au produit des valeurs propres de u.

2.2 Diagonalisation

Définition 25 (ROM 683)**.** On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonalisable.

Théorème 26 (ROM 683)**.** LASSE :

1. A est diagonalisable
2. $E = \bigoplus_{k=1}^{p} ker(A - \lambda_k I)$
3. $n = \sum_{k=1}^{p} dim(ker(A - \lambda_k I))$

4. χ_A est scindé de racines λ_k chacun de multiplicité $dim(ker(A-\lambda_k I))$
5. μ_A est scindé

Exercice 27 (bib ref)**.** Soient X,Y variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

Justifier que A est inversible. Probabilité que A soit diagonalisable ?

2.3 Décomposition de Dunford

Théorème 28 (GOU 205)**.** [DEV 1] Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que :

1. d soit diagonalisable et n soit nilpotente
2. d et n commutent
3. $u = d + n$

Application 29 (GOU 206)**.** Si la décomposition de Dunford de u est $u = d + n$, on a $exp(u) = exp(d) \times exp(n)$.

Corollaire 30 (ROM 765, 766)**.** [DEV 1] Si χ_u est scindé, u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable

Exemple 31 (no ref)**.**
$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour décomposition de Dunford $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $exp(A_1) = \begin{pmatrix} exp(3) & 0 \\ 0 & exp(3) \end{pmatrix} \times \left(I + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Autre application des vp pour endo : symétrique (resp. défini) positif ssi toutes ses valeur propres sont (resp. strictement) positives

3 Localisation de valeurs propres dans le cas complexe

Considérons $E = \mathbb{C}^n$ et $\|.\|$ une norme sur cet espace. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

3.1 Disques de Gerschgöring

Notation 32 (ROM 650)**.** On note pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $L_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ et $C_i = \sum_{j \neq i} |a_{j,i}|$. On note également $L = \max_{1 \leq i \leq n} \{L_i + |a_{i,i}|\}$ et $C = \max_{1 \leq i \leq n} \{C_i + |a_{i,i}|\}$

Théorème 33 (ROM 651)**.** [Gerschgöring-Hadamard] Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\lambda \in Sp(A)$. Il existe un indice $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leq L_i$

Corollaire 34 (ROM 651)**.** Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A on a $|\lambda| \leq \min\{L, C\}$.

une app : mat à diag dominante est inversible

3.2 Norme matricielle et rayon spectral

Définition 35 (ROM 650)**.** On associe à $\|.\|$ la norme matricielle induite qui est définie par :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \|A\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |Ax\|$$

Notation 36 (ROM 650)**.** On note $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_2$ les normes matricielles respectivement associées aux normes $x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ et $x \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$

cf corollaire, intéressant d'avoir une idée en tête. Existe thm Ostrowski.

Définition 37 (ROM 654)**.** Le rayon spectral de u (resp.A) est le réel $\rho(u) = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$ (resp. $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$).

Proposition 38 (ROM 654)**.** Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$

Théorème 39 (ROM 656)**.** Pour toute norme matricielle induite par une norme vectorielle, on a $\rho(A) \leq \|A\|$.

Proposition 40 (ROM 658)**.** Pour toute valeur initiale x_0, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{k+1} = Ax_k$ pour $k \leq 0$ converge vers le vecteur nul si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Théorème 41 (ROM 659)**.** [Gelfand, à voir si pas trop compliqué!!] Quelle que soit la norme choisie sur $M_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\|A^k\|\right)^{1/k}$

4 Application en géométrie

Proposition 42 (DEV 2)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ a_n & a_1 & . & . & . & a_{n-1} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ a_2 & a_3 & . & . & . & a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice circulante. Posons $P(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_k X^{k-1}$. Alors $det(A) = \prod\limits_{j=1}^{n} P(w^j)$ où $w = e^{2i\pi/n}$.

Application 43 (DEV 2)**.** Soit P un polygone du plan complexe à n côtés. Notons $(z_1, ..z_n) \in \mathbb{C}^n$ les affixes des sommets de P. On définit alors pas récurrence une suite de polygones $(P_k)_k$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arrêtes de P_k. Alors $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P.