Leçon 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

On considère $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Prérequis

Proposition 1 (GOU 172 modifier, ROM 139)**.** Pour une base B de E choisie, l'application qui à un endomorphisme de E associe sa matrice représentative dans la base B est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 2. Cette proposition nous permettra de faire le lien entre matrice et endomorphisme tout au long de cette leçon.

Pendant présentation dire que c'est pour ça que nos exemples sont essentiellement des matrices, on peut leur associé un endo.

1.1 Polynôme minimal et caractéristique

Proposition/définition 3 (BER 946 947)**.** $Ann(u) := \{P \in \mathbb{K}[X] | P(u) = 0\}$ est un idéal non nul et il existe un unique polynôme unitaire $\mu_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Ann(u) = \{\mu_u Q | Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Ce polynôme est appelé polynôme minimal de u.

Définition 4 (BER 948, inv pour coller avec mes réflexes)**.** On appelle polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$.

Définition 5 (BER 950)**.** On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de la matrice de u dans n'importe quelle base de E. On le note χ_u.

Théorème 6 (BER 950)**.** [Cayley Hamilton] $\chi_u(u) = 0$

Proposition 7 (BER 953)**.** χ_u et μ_u ont les mêmes racines dans $\mathbb{K}$.

1.2 Valeurs propres et sous-espaces propres

Définition 8 (BER 958)**.** On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur $x \in E$ est alors appelé un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Définition 9 (BER 958)**.** L'ensemble des valeurs propres de u est appellé le spectre de u, noté $Sp(u)$.

Proposition 10 (BER 958)**.** λ est une valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$.

Corollaire 11 (BER 958)**.** $Sp(u)$ est un ensemble fini.

Définition 12 (BER 959)**.** Soit $\lambda \in Sp(u)$. La multiplicité de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_u. Autrement si, c'est le plus grand entier $m \geq 1$ tel que $(X - \lambda)^m$ divise χ_u. On la notera m_λ.

Définition 13 (BER 958)**.** Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est le sous-espace vectoriel $E_\lambda = ker(u - \lambda id_E)$.

Proposition 14 (BER 959)**.** Soit $\lambda \in Sp(u)$. On a $1 \leq dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$

Proposition 15 (BER 959)**.** Les sous-espaces propres sont en somme directe.

2 Diagonalisation

Définition 16 (BER 958)**.** On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u soit diagonale.

Proposition 17 (TL2 305)**.** [A voir avec les autres, pas mettre 2e ssi] u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Proposition 18 (BER 959)**.** Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable
2. $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_K(u)} E_\lambda$
3. χ_u est scindé, et pour tout $\lambda \in Sp_K(u)$, on a $dim_K(E_\lambda) = m_\lambda$

Méthode 19. C'est souvent ce dernier point qui est utilisé dans la pratique pour montrer qu'un endomorphisme est (ou n'est pas) diagonalisable.

Exemple 20 (TL2 351)**.** Soit $u : (x, y) \mapsto (\pi y, -\pi x) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$. Sa matrice dans la base canonique est $C = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de u est alors $\chi_u(X) = X^2 + \pi = (X - i\pi)(X + i\pi)$ donc il est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Mais attention il ne l'est pas pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ car $\pi_u(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Ceci montre que le choix de $\mathbb{K}$ est important.

Exercice 21 (bib ref)**.** Soient X,Y variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

Justifier que A est inversible. Probabilité que A soit diagonalisable ?

Corollaire 22 (BER 960)**.** Si u possède $n = dim_K(E)$ valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Exemple 23 (TL2 310)**.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ a 3 valeurs propres distincts donc elle est diagonalisable.

Théorème 24 (BER 961)**.** LASSE :

1. u est diagonalisable
2. $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ annule u
3. il existe un polynôme P annulant u scindé sans racines multiples
4. μ_u est scindé sans racines multiples
5. $\mu_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$

Exemple 25. Un endomorphisme non nul nilpotente n'est pas diagonalisable car son polynôme minimal X^d (d est l'indice de nilpotence) est a racine multiple.

Corollaire 26 (BER 962, TL2 305 ou 306)**.** Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Si u est diagonalisable, alors $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

Théorème 27 (BER 962)**.** [théorème de codiagonalisation] Soit u' un autre endomorphisme de E tel que $u \circ u' = u' \circ u$. Si u et u' sont diagonalisable, alors ils sont diagonalisables dans une même base.

Corollaire 28 (ROM 684 que implication, savoir réciproque pour q°)**.** Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables (I ayant au moins deux éléments). Si ces endomorphismes sont deux à deux commutatifs il existe une base commune de diagonalisation.

s'étend aux matrices !

3 Un cadre d'application

3.1 Exponentielle de matrice

Définition 29 (BER 990, GOU 195)**.** On définit l'exponentielle d'une matrice A par $exp(A) = e^A = \sum_{m \leq 0} \frac{A^m}{m!}$.

De même on définit l'exponentielle d'un endomorphisme u par l'endomorphisme $exp(u) = e^u = \sum_{m \leq 0} \frac{u^m}{m!}$.

Proposition 30 (GOU 195, idée BER 993)**.** Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, ...\lambda_n$ telle que $A = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$ et on a alors $exp(A) = Pdiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})P^{-1}$.

Exemple 31 (TL2 351)**.** Reprenons la matrice de l'exemple 20. On a vu qu'elle est diagonalisable, il existe alors $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $C = P^{-1}\begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} P$. Ainsi $exp(C) = P\begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} P^{-1} = -I_2$

3.2 Décomposition de Dunford

Théorème 32 (GOU 205)**.** [DEV 1] Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que :

1. d soit diagonalisable et n soit nilpotente
2. d et n commutent
3. $u = d + n$

Application 33 (GOU 206)**.** Si la décomposition de Dunford de u est $u = d + n$, on a $exp(u) = exp(d) \times exp(n)$.

Corollaire 34 (ROM 765, 766)**.** [DEV 1] Si χ_u est scindé, u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable

Exemple 35 (no ref)**.**

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour décomposition de Dunford $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $exp(A_1) = \begin{pmatrix} exp(3) & 0 \\ 0 & exp(3) \end{pmatrix} \times \left(I + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

4 Endomorphismes symétriques

Dans cette partie, le corps $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ et $(E, < .,. >)$ un espace euclidien de dimension n. Ici que pour $\mathbb{R}$ mais on pourrait l'étendre à $\mathbb{C}$ et espaces hermitiens.

4.1 Définitions

Définition 36 (ROM 732 + 735)**.** Un endomorphisme u est dit symétrique si pour tout $x, y \in E$, $< u(x), y > = < x, u(y) >$.
On dit que u est symétrique positif s'il est symétrique avec $< x, u(x) > \leq 0$ pour tout $x \in E$.
On dit que u est symétrique définie positif s'il est symétrique avec $< x, u(x) >> 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Définition 37 (BER 98 + ROM 735)**.** Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tA = A$.
A est dite symétrique positive si elle est symétrique avec ${}^tXAX \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}$.
A est dite symétrique définie positive si elle est symétrique avec ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}$.
On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques, $S_n^+(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définie positives.

Exemple 38 (ROM 735)**.** $G = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique de $S_2(\mathbb{C})$.

Proposition 39. $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique

Proposition 40. ajouter propriété vp positive ; strictement positive

4.2 Théorème spectral

Théorème 41 (ROM 734, GOU 256)**.** [Théorème spectral] Tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormée.

Corollaire 42 (GOU 257, TL2 247)**.** [orthogonalisation simultanée] Soient M, N deux matrices symétriques telles que la matrice M soit définie positive. Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$C^*MC = I_n \text{ et } C^*NC = D$$

où D est une matrice diagonale réelle.

Application 43 (ROM 742)**.** Si $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, on a $|||A||| = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ où ρ correspond au rayon spectral, où $|||.|||$ est la norme matricielle induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Application 44 (CAL)**.** [DEV 2] L'exponentielle de matrice est un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On peut étendre aux formes hermitiennes

Application aux formes quadratiques, ROM 490, mais + rapide avec algo de Gauss donc au final idk