Leçon 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, où $\mathbb{K}$ est un coprs commutatif. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel non nul de E.

1 Sous-espaces stables

Définition 1 (OA 158, TL2 298)**.** On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Définition 2 (TL2 298)**.** Supposons F stable par u. On appelle endomorphisme de V insuit par u l'application $u_{|F} : F \to F$, noté $u_{|F}$.

Exemple 3 (OA)**.** $ker(u)$ et $Im(u)$ sont des sous-espaces stables par u.

Proposition 4 (TL2 298, OA 159)**.** Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Alors v laisse stables le noyau de et l'image de u, ainsi que chaque espace propre de u.

Proposition 5 (OA 161, TL2 300)**.** Supposons F stable par u et considérons $u_{|F}$ l'enfomorphisme induit.

1. Le polynôme minimal de $u_{|F}$ divise celui de u.
2. Le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ divise celui de u.

Corollaire 6 (TL2 300)**.** Pour toute valeur propre λ de u, la dimension de l'espace propre $E_\lambda(u)$ est au plus égale à la multiplicité de λ.

Proposition 7 (TL2 301)**.** Suppososns que E soit somme direct des sev $V_1, .., V_r$ de E stables par u. Pour tout i, notons u_i l'endomorphisme de V_i induit par u. Alors :

1. Le polynôme minimal μ_u est le ppcm des μ_{u_i}, pour i allant de 1 à p
2. Le polynôme caractéristique χ_u est le produit des χ_{u_i}, pour i allant de 1 à p.

Corollaire 8 (TL2 301)**.** [Traduction matricielle] Soit $A = Diag(A_1, .., A_r)$ une matrice diagonal par blocs. Alors :

1. Le polynôme minimal μ_A est le ppcm des μ_{A_i}, pour i allant de 1 à p
2. Le polynôme caractéristique χ_A est le produit des χ_{A_i}, pour i allant de 1 à p.

2 Lemme des noyaux et réduction d'endomorphismes

2.1 Lemme des noyaux

Lemme 9 (BER 943)**.** [lemme des noyaux] Soient $P_1, ..., P_r$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre-eux deux à deux. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$Ker((P_1...P_r)(u)) = Ker(P_1(u)) \oplus ... \oplus Ker(P_r(u))$$

Important : reste vrai en dim infinie !

Proposition 10 (BER 957)**.** Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Proposition 11 (TL2 317)**.** On a $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_{\lambda}^{m_\lambda}$

2.2 Trigonalisation

Définition 12 (ROM 675)**.** On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 13 (ROM 676, GOU 174)**.** A est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$

Corollaire 14 (ROM 676)**.** Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable.

Exemple 15. Sur $\mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable.

Proposition 16 (ROM 676)**.** Si u est trigonalisable et si F est un s.e.v. stable par u, alors l'endomorphisme $u_{|F}$ est trigonalisable.

Proposition 17 (ROM 678)**.** [trigonalisation simultanée] Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de E qui commutent deux à deux. Alors il existe une base commune de trigonalisation dans E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$.

2.3 Diagonalisation

Définition 18 (ROM 683)**.** On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonalisable.

Proposition 19 (BER 957)**.** Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable
2. $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_K(u)} E_\lambda$
3. χ_u est scindé, et pour tout $\lambda \in Sp_K(u)$, on a $dim_K(E_\lambda) = m_\lambda$

Théorème 20 (ROM 683)**.** LASSE :

1. A est diagonalisable
2. $E = \bigoplus_{k=1}^{p} ker(A - \lambda_k I)$
3. $n = \sum_{k=1}^{p} dim(ker(A - \lambda_k I))$
4. χ_A est scindé de racines λ_k chacun de multiplicité $dim(ker(A - \lambda_k I))$
5. μ_A est scindé

Corollaire 21 (BER 962, TL2 305 ou 306)**.** Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Si u est diagonalisable, alors $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

Théorème 22 (BER 962)**.** [théorème de codiagonalisation] Soit u' un autre endomorphisme de E tel que $u \circ u' = u' \circ u$. Si u et u' sont diagonalisable, alors ils sont diagonalisables dans une même base.

2.4 Décomposition de Dunford

Théorème 23 (GOU 205, ROM 613)**.** [DEV bonus] Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que :

1. d soit diagonalisable et n soit nilpotente
2. d et n commutent
3. $u = d + n$

De plus, d et n sont commutatifs.

Application 24 (GOU 206)**.** Si la décomposition de Dunford de u est $u = d + n$, on a $exp(u) = exp(d) \times exp(n)$.

Corollaire 25 (ROM 765, 766)**.** [DEV 1] Si χ_u est scindé, u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable

Exemple 26 (no ref)**.**

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour décomposition de Dunford $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $exp(A_1) = \begin{pmatrix} exp(3) & 0 \\ 0 & exp(3) \end{pmatrix} \times \left(I + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

3 Cayley Hamilton et réduction de Jordan

3.1 Matrice compagnon et Cayley Hamilton

[TL2, tout le pragraphe] Considérons $x \in E$ fixé.

Notation 27 (TL2 301)**.** Notons $E_{u,x}$ le sous espace vectoriel de E engendré par les $u^k(x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 28 (TL2 301)**.** $E_{u,x}$ est stable par u. C'est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) de E stable par u contenant x.

Définition 29 (TL2 301)**.** On pose $f : Q \in \mathbb{K}[X] \mapsto Q(u)(x)$.

Proposition 30 (TL2 301)**.** $E_{u,x} = Imf$ et $ker(f)$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$

Lemme 31 (TL2 302)**.** Soient P le générateur unitaire de $Kerf$ et $p := degP$. Alors $C := (x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est une base de $E_{u,x}$. Par ailleurs P divise μ_u.

Définition 32 (TL2 302)**.** Soit $P = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré $p \geq 1$. On appelle matrice compagnon du polynôme P la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & -a_2 \\ & . & . & . & \\ 0 & 0 & ... & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K})$.

Proposition 33 (TL2 302)**.** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré $p \geq 1$ et C_P sa matrice compagnon. Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C_P sont tous deux égaux à P.

Théorème 34 (ROM 607)**.** [Cayley Hamilton] $\chi_u(u) = 0$.

Corollaire 35 (ROM 607)**.** μ_u divise χ_u.

Exemple 36 (TL2 304)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = (X+1)(X-1)^2$. On sait que $\mu_A | \chi_A$ et que μ_A a les mêmes racines que χ_A. On a donc deux possibilités : $\mu_A = (X+1)(X-1) = X^2 - 1$ ou $\mu_A = (X+1)(X-1)^2$. En calculant A^2 on se rend compte que $X^2 - 1$ n'annule pas A donc $\mu_A = (X+1)(X-1)^2$.

3.2 Réduction de Jordan

On considère A la matrice associé à u.

Lemme 37 (BER 977)**.** [DEV 2 noyaux itérés] Supposons u nilpotent d'indice q. On a :

1. $\forall i \in [\![1, r]\!], Ker(u^{i-1}) \subsetneq Ker(u^i)$
2. $\forall i \geq r,\ Ker(u^i) = Ker(u^r) = E$

Lemme 38 (DEV 2 BER entre les lignes)**.** Supposons u nilpotent d'indice q. Il existe des sous-espaces vectoriels $F_{r+1}, ..., F_0$ de E tels que, pour tout $i \in [\![1, r+1]\!]$:

1. $ker(u^i) = ker(u^{i-1}) \oplus F_i$
2. $u(F_i) \subset F_{i-1}$

Proposition 39 (BER)**.** Supposons u nilpotent d'indice q. Il existe une base dans laquelle A est semblable à une marice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & J_{d_1} & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & & . & J_{d_r} \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$ où $J_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & 0 \\ . & & & & . & 1 \\ 0 & . & . & . & & 0 \end{pmatrix} \in M_d(\mathbb{R})$.

Théorème 40 (GOU 209)**.** Si $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & A_2 & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & A_s \end{pmatrix}$ où $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & v_{i,\alpha_i - 1} \\ 0 & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ pour tout i

Application 41. Cette décomposition permet de calculer les puissances et exponentielles de matrices.

Exemple 42 (no ref :( )**.** Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont 3 et 2 et $\chi_A(X) = (3 - xX)(2 - X)^2$. De plus $ker(A - 2I) = Vect((1, 1, -3))$ donc A n'est pas diagonalisable et la réduction de Jordan de A est donc $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour calculer les puissances ou l'exponentielle de A, on se ramène à la décomposition de Dunford $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.