Leçon 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ sa matrice associée dans une base $\mathcal{B}$.

1 Polyôme d'endomorphisme

1.1 Prérequis : éléments propres

Proposition 1 (GOU 172 modifier, ROM 139)**.** Pour une base B de E choisie, l'application qui à un endomorphisme de E associe sa matrice représentative dans la base B est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 2. Cette proposition nous permettra de faire le lien entre matrice et endomorphisme tout au long de cette leçon.

Définition 3 (BER 958)**.** On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur $x \in E$ est alors appelé un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Définition 4 (BER 958)**.** L'ensemble des valeurs propres de u est appellé le spectre de u, noté $Sp(u)$.

Définition 5 (BER 959)**.** Soit $\lambda \in Sp(u)$. La multiplicité de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_u. Autrement si, c'est le plus grand entier $m \geq 1$ tel que $(X-\lambda)^m$ divise χ_u. On la notera m_λ.

Définition 6 (BER 958)**.** Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est le sous-espace vectoriel $E_\lambda = ker(u - \lambda id_E)$.

Définition 7 (?)**.** Le sous espace caractéristique associé à la valeur propre $\lambda \in Sp(u)$ est $Ker(u - \lambda id_E)^{m_\lambda}$.

1.2 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Notation 8 (BER 941, ROM 603)**.** On note $u^0 = id$ et on définit par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{k+1} = u^k \circ u$.

Définition 9 (BER 942, ROM 603)**.** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit l'endormorphisme $P(u)$ par $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$. Un tel endomorphisme est appelé un polynôme d'endomorphisme en u.

Notation 10 (BER 942)**.** On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u) | P \in \mathbb{K}[X]\}$. C'est une sous algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$

Proposition 11 (BER 942)**.** L'application $ev_u : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$ est un morphisme de $\mathbb{K}-$algèbres associatives unitaires et $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. Autrement dit, pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

1. $1(u) = Id_E$
2. $(\lambda P)(u) = \lambda P(u)$
3. $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$
4. $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$

Proposition 12 (BER 942)**.** De plus, pour tout sous espace vectoriel F de E stable par u, on a $P(u_{|F}) = P(u)_{|F}$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

Remarque 13 (ROM 603)**.** Tous les éléments se définissent de manière analogue pour les matrices : si $A = Mat_B(u)$ alors $P(A) = P(u)$, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

Proposition 14 (ROM 604)**.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour toute valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on a alors $Sp(P(u)) = \{P(\lambda)|\lambda \in Sp(u)\}$.

Contre-exemple 15 (ROM 604)**.** Considérons l'endomorphisme associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $P(X) = X^2$. On a alors $A^2 = -I_2$ et $Sp(A) = \emptyset$. Ainsi l'inclusion $\{P(\lambda)|\lambda \in Sp(u)\} \subset Sp(u)$ est strict.

Lemme 16 (BER 943)**.** [lemme des noyaux] Soient $P_1, ..., P_r$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre-eux deux à deux. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$Ker((P_1...P_r)(u)) = Ker(P_1(u)) \oplus ... \oplus Ker(P_r(u))$$

Important : reste vrai en dim infinie !

Proposition 17 (BER 957)**.** Les sous-espaces propres sont en somme directe.

1.3 Polynôme minimal

Proposition et définition 18 (BER 944 945)**.** $Ann(u) := \{P \in \mathbb{K}[X]|P(u) = 0\}$ est un idéal non nul et il existe un unique polynôme unitaire $\mu_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Ann(u) = \{\mu_u Q|Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Ce polynôme est appelé polynôme minimal de u.

Théorème 19 (ROM 605)**.** L'espace vectoriel $\mathbb{K}[u]$ est de dimension égale au degré de π_u et $(u^k)_{0 \leq k \leq dim(\pi_u)-1}$ donne une base.

Théorème 20 (ROM 606)**.** $\mathbb{K}[u]$ est un corps $\iff$ π_u est irréductible.

Proposition 21 (GOU 186, TL2 299)**.** λ est valeur propre de A $\iff$ $\mu_A(\lambda) = 0$

Application 22 (ROM 635)**.** Si $u \in GL(E)$, alors $u^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{p} a_k u^{k-1} \in \mathbb{K}[u]$.

1.4 Polynôme caractéristique

Définition 23 (BER 948, inv pour coller avec mes réflexes)**.** On appelle polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$.

Définition 24 (BER 950)**.** On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de la matrice de u dans n'importe quelle base de E. On le note χ_u.

Proposition 25 (GOU 172,BER 956)**.** λ est une valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$.

Corollaire 26 (BER 958)**.** $Sp(u)$ est un ensemble fini.

Proposition 27 (BER 957)**.** Soit $\lambda \in Sp(u)$. On a $1 \leq dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$

Théorème 28 (BER 950)**.** [Cayley Hamilton] On a $\chi_u(u) = 0$.

Corollaire 29 (ROM 612)**.** Soit $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$ et pour tout $1 \leq i \leq s$, N_i le sous-espace caractéristique associée à λ_i. On a alors :

1. N_i stable par u pour tout $1 \leq i \leq s$.
2. $E = N_1 \oplus ... \oplus N_s$
3. $dim(N_i) = \alpha_i$, pour tout $1 \leq i \leq s$

Proposition 30 (BER 953)**.** χ_u et μ_u ont les mêmes racines dans $\mathbb{K}$.

2 Réduction d'endomorphisme

2.1 Trigonalisation

Définition 31 (ROM, TL2, BER 961 ;ROM 675)**.**

On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 32 (ROM 676, GOU 174)**.** A est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$

Corollaire 33 (ROM 676)**.** Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice de $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ est trigonalisable.

Exemple 34. Sur $\mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable.

Proposition 35 (TL2 678, vient après corollaire)**.** [besoin pour dem nilp] Tout endomorphisme annulé par un polynôme scindé est trigonalisable.

APPLICATION : cf le truc de nilp qui nécessite cette démo

Exemple 36 (GOU 185)**.** Si A est triangulaire de coefficients diagonaux $\alpha_1, ..., \alpha_n$, alors $P(A)$ est également triangulaire, de coefficients diagonaux $P(\alpha_1), ..., P(\alpha_n)$.

2.2 Diagonalisation

Définition 37 (ROM 683)**.** On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonalisable.

Théorème 38 (BER 961)**.** LASSE :

1. u est diagonalisable
2. $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ annule u
3. il existe un polynôme P annulant u scindé sans racines multiples
4. μ_u est scindé sans racines multiples
5. $\mu_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$

Exemple 39 (TL2 351)**.** Soit $u : (x, y) \mapsto (\pi y, -\pi x) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$. Sa matrice dans la base canonique est $C = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de u est alors $\chi_u(X) = X^2 + \pi = (X - i\pi)(X + i\pi)$ donc il est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Mais attention il ne l'est pas pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ car $\pi_u(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Ceci montre que le choix de $\mathbb{K}$ est important.

3 Un cadre d'application

Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Exponentielle de matrice

Définition 40 (BER 990, GOU 195)**.** On définit l'exponentielle d'une matrice A par $exp(A) = e^A = \sum_{m \leq 0} \frac{A^m}{m!}$.
De même on définit l'exponentielle d'un endomorphisme u par l'endomorphisme $exp(u) = e^u = \sum_{m \leq 0} \frac{u^m}{m!}$.

Proposition 41 (GOU 195, idée BER 993)**.** Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, ...\lambda_n$ telle que $A = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$ et on a alors $exp(A) = Pdiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})P^{-1}$.

Exemple 42 (TL2 351)**.** Reprenons la matrice de l'exemple 39. On a vu qu'elle est diagonalisable, il existe alors $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $C = P^{-1} \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} P$. Ainsi $exp(C) = P \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} P^{-1} = -I_2$

3.2 Décomposition de Dunford

Définition 43 (ROM 648 ; TL2 321)**.**

u est dit nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{q-1} \neq 0$ et $u^q = 0$.
On dit que q est l'indice de nilpotence de u.

A est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$

Théorème 44 (GOU 205, ROM 613)**.** [DEV 1] Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que :

1. d soit diagonalisable et n soit nilpotente
2. d et n commutent
3. $u = d + n$

De plus, d et n sont commutatifs.

Application 45 (GOU 206)**.** Si la décomposition de Dunford de u est $u = d + n$, on a $exp(u) = exp(d) \times exp(n)$.

Corollaire 46 (ROM 765, 766)**.** [DEV 1] Si χ_u est scindé, u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable

Exemple 47 (no ref)**.**

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour décomposition de Dunford $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $exp(A_1) = \begin{pmatrix} exp(3) & 0 \\ 0 & exp(3) \end{pmatrix} \times \left(I + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

4 Application : le déterminant circulant

Proposition 48 (GOU 190)**.** [DEV 2] Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ a_n & a_1 & . & . & . & a_{n-1} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ a_2 & a_3 & . & . & . & a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice circulante. Posons $P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_k X^{k-1}$. Alors $det(A) = \prod_{j=1}^{n} P(w^j)$ où $w = e^{2i\pi/n}$.

Application 49 (DEV 2)**.** Soit P un polygone du plan complexe à n côtés. Notons $(z_1, ..z_n) \in \mathbb{C}^n$ les affixes des sommets de P. On définit alors pas récurrence une suite de polygones $(P_k)_k$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arrêtes de P_k. Alors $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P.