Leçon 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Soit E un $\mathbb{K}-$ev, où $\mathbb{K}$ un corps.

1 Préliminaires

1.1 Familles libres, génératrices

Considérons une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E

Définition 1 (BER 40, prendre 2eme)**.** On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre si pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on a

$$\sum_{i\in I}\lambda_i e_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i \in I$$

Définition 2 (BER 41)**.** Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Exemple 3 (TL2 187)**.** $\{1, \sqrt{2}\}$ est liée dans le $\mathbb{R}-$ev $\mathbb{R}$ mais elle est libre si on voit $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}-$ev.

Définition 4 (BER 41)**.** On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice si le sous-espace vectoriel engendré par ses éléments est E tout entier. Autrement dit, pour tout $x \in E$, il existe $J \subset I$ fini et $(\lambda_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{j\in J}\lambda_j e_j$.

Exemple 5 (TL2 1985)**.** $\{1\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{R}-$ev. Cependant ce n'est pas une partie génératrice de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}-$ev. Ceci montre l'importance du corps de base.

Proposition 6 (GOU 117, reformuler)**.** Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E composé de n éléments, toute famille libre a au plus n éléments.

1.2 Bases

Définition 7. On dit que (e_j) est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice. Cela revient à dire que tout $x \in E$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{j\in J}\lambda_j e_j$$

où J est un sous-ensemble fini de I.

Exemple 8 (TL2 192)**.** $\{1\}$ est une base de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}-$ev, mais pas si on le voit comme un $\mathbb{C}-$ev. Dans ce cas $\{1, i\}$ est une base.

Définition 9 (GOU 117)**.** On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice fine de E. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

On suppose désormais E de dimension finie, jusqu'à la fin de cette leçon.

Théorème 10 (GOU 117)**.** [théorème de la base extraite] De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Corollaire 11 (GOU 117)**.** Tout $\mathbb{K}-$ev de dimension finie admet une base.

Théorème 12 (GOU 117)**.** [théorème de la base incomplète] Toute partie libre peut-être completée en une base.

Vrai dim infinie, mais lemme de Zorn ou axiome du choix et plus dur montrer.

2 Théorie de la dimension

On se place toujours dans le cadre où E est de dimension finie.

2.1 Définition et propriétés de calcul

Théorème et définition 13 (GOU 117)**.** Toutes les bases de E ont même cardinal n. L'entier n s'appelle dimension de E et on le note $dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $dim(E)$.
Par convention $dim_{\mathbb{K}}(E) = 0$ si $E = \{0\}$.

Exemple 14 (TL2 533)**.** [A voir car je ne sais pas dem, reprendre C] $\mathbb{C}$ est de dimension 2 si on le voit comme un $\mathbb{R}-$ev, car $\{1, i\}$ est une base ; mais de dimension 1 si on le voit comme un $\mathbb{C}-$ev, $\{1\}$ étant une base.

q° : avoir en tête base finie dans un ev et infinie dans un autre, ex $\mathbb{R}$ dim 1 comme $\mathbb{R}-$ev mais dim infinie comme $\mathbb{Q}-$ev (idk dem)

Proposition 15 (BER 43, TL1 334)**.** [A voir] Deux $\mathbb{K}-$ev sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension.

Proposition 16 (TL1 336, BER 44)**.** Soit V est un sous-espace vectoriel de E. On a alors V est de dimension finie $dim(V) \leq dim(E)$. De plus, $dim(V) = dim(E)$ si et seulement si $V = E$.

Insister pendant plan et dire que ça donne méthode pour montrer égalité d'ensemble : 1 inclusion + égalité des dimensions : ESSAYER TROUVER EX/ APPLICATION

Proposition 17 (TL1 338)**.** Soit F un autre espace vectoriel de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et $dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$.

on énonce pour 2 se généralise à n par récurrence.

Proposition 18 (GOU 118)**.** [formule de Grassman] Soit E_1, E_2 deux sev de dimension finie d'un ev de dimension quelconque. Alors $E_1 + E_2$ est un sev de dimension finie et $dim(E_1 + E_2) = dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)$.

Proposition 19 (BER 44)**.** [A voir selon dem] Soit F un deuxième sous-espace vectoriel de dimension finie. On a $dim(\mathcal{L}(E, F)) = dim(E) \times dim(F)$.

2.2 Sous-espaces vectoriels caractérisés par leur dimensions

Définition 20 (TL1 334)**.** On appelle droite (vectorielle) tout espace vectoriel de dimension 1.

Définition 21 (TL1 334)**.** On appelle plan (vectoriel) tout espace vectoriel de dimension 2.

Définition 22 (TL1 334)**.** On appelle hperplan (vectoriel) de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Résultat plus général avec sev V_i, $\sum dim(V_i) \leq (p-1)n + dim(\cap V_i)$

Proposition 23 (TL1 383)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $H_1, ..., H_p$ des hyperplans. Alors $dim(H_1 \cap ... \cap H_p) \geq dim(E) - p$.

2.3 Somme directe

Considérons V, W deux sev de E.

Proposition et définition 24 (TL1 196, changer noms pour aller avec en dessous)**.** LASSE :

1. E est la somme $V + W$ et $V \cap W = \{0\}$
2. $(x, y) \mapsto y + z$ de $V \times W$ dans E est un isomorphisme
3. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in V \times W$ tel que $x = y + z$.

Si ces affirmations sont vérifiées, on dit que E est la somme directe de F et G et l'on écrit $E = F \oplus G$.

Proposition 25 (TL1 339)**.** LASSE

1. $E = V \oplus W$
2. $dim(E) = dim(V) + dim(W)$ et $V \cap W = \{0\}$
3. $dim(E) = dim(V) + dim(W)$ et $E = V + W$

Dans ce cas, on dit que W est un supplémentaire de V dans E.

Proposition 26 (TL2 290)**.** On a $dim(V + W) \leq dimV + dimW$ avec égalité si et seulement si $V \oplus W$.

s'étend à n sev mais là dem facile avec Grassman

3 Le rang

On considère dans cette partie E et F deux $\mathbb{K}-$ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 27 (TL1 338, GOU 120)**.** On appelle noyau de f l'ensemble $Kerf = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E | f(x) = 0\}$.
On appelle image de f l'ensemble $Im(f) = f(E)$.

Proposition 28 (GOU 120)**.** [pas sûre de mettre] $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont des sev de E et F respectivement.

Définition 29 (GOU 120)**.** Si $Im(f)$ est de dimension finie, on dit que f est de rang fini et $dim(Im(f))$ est appelé rang de f, noté $rg(f)$.

Théorème 30 (TL1 338)**.** [Théorème du rang] Si E est de dimension finie, on a

$$dim(E) = dim(Ker(f)) + rg(f)$$

Corollaire 31 (TL1 340)**.** Si E et F sont de dimension finie n et p respectives, alors :

1. $rg(f) = n \iff f$ est injective
2. $rg(f) = p \iff f$ est surjective
3. $rg(f) \leq min(n, p)$

Théorème 32 (TL1 340)**.** [Caractérisation des isomorphismes] Supposons E et F de même dimension finie n. LASSE :

1. f bijective (i.e. isomorphisme)
2. f est injective
3. f est sujrective
4. $rg(f) = n$

Oral insister utile, sert à montrer isomorphisme : égalité des dim + injectivité ou surjectivité vu par application (montre inj ; on a égalité dim thm du rang)

Application 33. Si G est un supplémentaire de $ker(f)$, alors G est isomorphe à $Im(f)$.

application thm rang + prop égalité ens => isom OU considérer $f_{|G}$

Remarque 34. Attention cependant, en général, on n'a pas $ker(f) \oplus im(f)$.

Savoir que pour avoir il faut $ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ et un exemple ou c'est ok projections (garder pour les questions)

4 Application

4.1 Aux isométries

Dans cette partie, on considèrera $E, < ., . >$ un espace euclidien réel, toujours de dimension finie n.

Définition 35. On appelle groupe orthogonal, et on note $O(E)$, l'ensemble des isométrie de E.

Définition 36 (par coeur par trop ref, un peu PER p125 et un peu ROM p730)**.** Soit $u \in GL(E)$ tel que $u^2 = id$.
On dit que u est une réflexion si $dim(ker(u - id)) = n - 1$, c'est à dire si c'est une symétrie par rapport à un hyperplan.

Théorème 37 (Oraux XENS)**.** [DEV1] Le groupe O(E) est engendré par les réflexions. Plus précisément, si u est dans O(E), u est produit d'au plus $r = rg(u - id)$réflexions.

A savoir que dem réduction des endo orthogonaux se fait par réc sur la dimension
Avoir en tête qu'on peut utiliser la dimension pour démontrer des résultats par récurrence sur la dimension. On retrouve notamment plusieurs exemples dans la réduction des endomorphismes : codiagonalisation, trigo ssi pol car scindé (à vérif)

4.2 Noyaux itérés

Dans cette partie, on suppose que u est nilpotent d'indice r.

Proposition 38 (BER 977)**.** [DEV 2 noyaux itérés] On a :

1. $\forall i \in [\![1, r]\!], Ker(u^{i-1}) \subsetneq Ker(u^i)$
2. $\forall i \geq r,\ Ker(u^i) = Ker(u^r) = E$

Proposition 39 (BER entre les lignes)**.** [DEV 2] Il existe des sous-espaces vectoriels $F_{r+1}, ..., F_0$ de E tels que, pour tout $i \in [\![1, r+1]\!]$:

1. $ker(u^i) = ker(u^{i-1}) \oplus F_i$
2. $u(F_i) \subset F_{i-1}$

Application 40. Une application de ces propositions est le réduction de Jordan. Cette décomposition permet par exemple de calculer les puissances et exponentielles de matrices.

Permet de retoruver décomposition de Dunford, comme brut sépare terrme diag et terme sur diag et donne la déc.